MAP1156 – ANALIZA MATEMATYCZNA 2.1 A
Listy zadań

Lista 1

1.1. Przyjmując w definicji całki oznaczonej podział równomierny obliczyć podane całki oznaczone i podać ich interpretację geometryczną:

a) $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx$; **b)** $\int\limits_0^1 x^2\,dx$; **c)** $\int\limits_1^2 e^x\,dx$.

Wskazówka. Ad. **b)**. Zastosować wzory $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Ad. **c)**. Zastosować wzór na sumę ciągu geometrycznego $a+aq+\ldots+aq^{n-1}=a\dfrac{1-q^n}{1-q}$ oraz wykorzystać równość $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$;

1.2. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć całki:

a) $\int\limits_1^2 \left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$; **b)** $\int\limits_0^1 \dfrac{x-1}{x+1}\,dx$; **c)** $\int\limits_0^9 \dfrac{dx}{x^2+9}$;

d) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{x^2-1}$; **e)** $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x\,dx$; **f)** $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\cos x\,dx$.

*** 1.3.** Korzystając z definicji całki oznaczonej uzasadnić równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\pi}{4n}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}+\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{tg}\dfrac{n\pi}{4n}\right)\right]=\ln\sqrt{2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}=\dfrac{1}{4}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{(1+n)\cdot(2+n)\cdot\ldots\cdot(n+n)}{n^n}\right]=\ln 4-1$.

1.4. Obliczyć całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

a) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\ln 3}\dfrac{e^x\,dx}{1+e^{2x}},\ t=e^x$; **b)** $\int\limits_0^{\pi}\sin x e^{\cos x}\,dx,\ t=\cos x$; **c)** $\int\limits_1^3\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x+1}},\ 1+x=t^2$;

d) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{x}(4-x)},\ x=t^2$; **e)** $\int\limits_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx,\ x=3\sin t$; **f)** $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\dfrac{\sqrt[3]{x-x^3}\,dx}{x^4},\ x=\dfrac{1}{t}$.

1.5. Metodą całkowania przez części obliczyć całki oznaczone:

a) $\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\,dx$; **b)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$; **c)** $\int\limits_0^{\pi} x(1+\cos x)\,dx$;

d) $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$; **e)** $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$; **f)** $\int\limits_{\sqrt{e}}^{e}\dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$.

Lista 2

2.1. Narysować funkcje podcałkowe i obliczyć całki oznaczone:

a) $\int\limits_{-2}^{2} ||x|-1|\, dx$; **b)** $\int\limits_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx$; **c)** $\int\limits_{-2}^{2} \operatorname{sgn}\left(x - x^2\right) dx$; **d)** $\int\limits_{1}^{3} x\lfloor x \rfloor\, dx$.

2.2. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach i podać ich interpretacje geometryczną:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$, $[0,2]$; **b)** $f(x) = \sin^3 x$, $[0,\pi]$; **c)** $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $\left[0, \sqrt{3}\right]$; **d)** $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $[0,2]$.

2.3. Wykorzystując własności całek z funkcji parzystych, nieparzystych lub okresowych uzasadnić równości:

a) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x^5 - 3x^3 + x}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx = 0$; **b)** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{x \sin x\, dx}{2 + \cos x^2} = 2\int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{x \sin x\, dx}{2 + \cos x^2}$;

c) $\int\limits_{-\frac{1}{e}}^{\frac{1}{e}} \ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\, dx = 0$; **d)** $\int\limits_{0}^{5} (x - \lfloor x \rfloor)\, dx = 5\int\limits_{0}^{1} (x - \lfloor x \rfloor)\, dx$.

2.4. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

a) $y = 2x - x^2,\ x + y = 0$; **b)** $y = x^3,\ y = 2x,\ (x \geqslant 0)$; **c)** $y = x^2,\ y = \dfrac{1}{2}x^2,\ y = 3x$;

d) $4y = x^2,\ y = \dfrac{8}{x^2+4}$; **e)** $yx^2 = 1,\ y = x,\ y = 8x$; **f)** $yx^4 = 1,\ y = 1,\ y = 16$.

2.5. Obliczyć długości krzywych:

a) $y = 2\sqrt{x^3}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 11$; **b)** $y = \operatorname{ch} x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$;

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$; **d)** $y = \ln \cos x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

2.6. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu podanych figur T wokół wskazanych osi:

a) $T: 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2,\ Ox$; **b)** $T: 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4},\ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{tg} x,\ Ox$;

c) $T: 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{5},\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}},\ Oy$; **d)** $T: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x},\ Oy$.

Lista 3

3.1. Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów podanych funkcji wokół wskazanych osi:

a) $f(x) = \sqrt{4+x},\ -4 \leqslant x \leqslant 2,\ Ox$; **b)** $f(x) = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ Ox$;

c) $f(x) = \ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3},\ Oy$; **d)** $f(x) = |x-1|+1,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ Oy$.

3.2. **a)** Punkt materialny rozpoczął ruch prostoliniowy z prędkością początkową $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ i przyspieszeniem $a_0 = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Po czasie $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ punkt zaczął poruszać się z opóźnieniem $a_1 = -1\,\mathrm{m/s^2}$. Znaleźć jego położenie po czasie $t_2 = 20\,\mathrm{s}$.

b) Dwie cząstki A i B położone w odległości $d = 36$ zaczynają zbliżać się do siebie z prędkościami odpowiednio $v_A(t) = 10t + t^3$, $v_B(t) = 6t$, gdzie $t \geqslant 0$. Po jakim czasie nastąpi ich zderzenie?

3.3. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)^2}$; **b)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}$; **c)** $\displaystyle\int_\pi^\infty x\sin x\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^\infty x(2-x)e^{-x}\,dx$; **e)** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4}$; **f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-4x+13}$.

3.4. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$; **b)** $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$; **c)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x(x+1)\,dx}{x^4+x+1}$;

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\left(x^2+1\right)\,dx}{x^4+x^2+1}$; **e)** $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^3}$; **f)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\left(\sqrt{2}+\cos x\right)\,dx}{\sqrt{x}-1}$.

3.5. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx}{x\,(x+1)}$; **b)** $\displaystyle\int_5^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$;

d) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$; **e)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$; **f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\left(e^{2x}+1\right)\,dx}{e^x-1}$.

3.6. **a)** Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \dfrac{1}{x^2+4}$ oraz osią Ox.

b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x}\right\}$.

c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ dla $x \geqslant 1$ wokół osi Ox ma skończoną wartość.

Lista 4

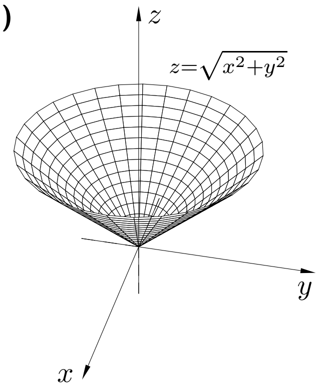
4.1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

a) $f(x,y) = \dfrac{3x}{2x-5y}$; **b)** $f(x,y) = \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$; **c)** $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$;

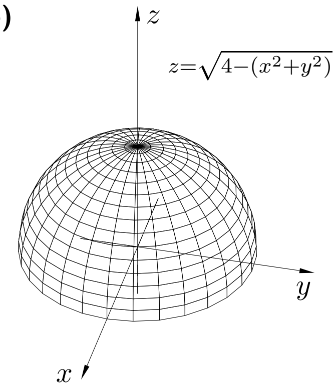
d) $f(x,y) = \ln\dfrac{x^2+y^2-4}{9-x^2-y^2}$; **e)** $f(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}$; **f)** $f(x,y,z) = \arcsin\left(x^2+y^2+z^2-2\right)$.

4.2. Wykresy (rys. **a)**–**c)**) połączyć z odpowiadającymi im poziomicami (rys. **A)**–**C)**) wykonanymi dla $h = 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0$:

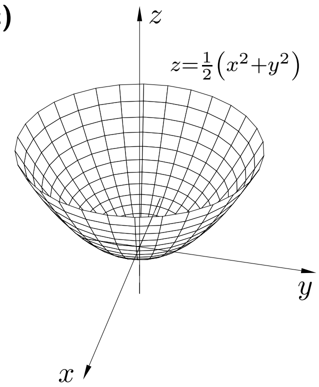
a)



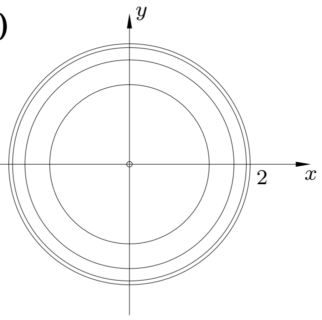
b)



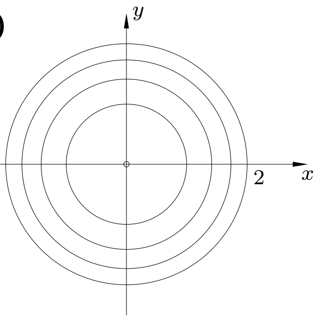
c)



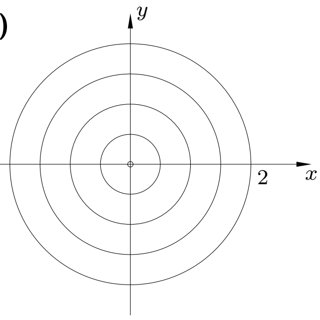
A)



B)



C)



4.3. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $f(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$; **b)** $f(x,y) = \sqrt{3+2x-x^2-y^2}$; **c)** $f(x,y) = x^2-2x+y^2+2y+3$;

d) $f(x,y) = \sin y$; **e)** $f(x,y) = x^2-1$; **f)** $f(x,y) = 1-|x|$.

4.4. Uzasadnić, że nie istnieją granice funkcji:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$; **c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} \dfrac{\sin^2 x}{y^2}$; **d)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$.

4.5. Obliczyć granice funkcji:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$; **c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2y^2-4x^2-y^2+4}{xy-2x-y+2}$; **e)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{tg}\left(x^3-y^3\right)}{x-y}$; **f)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}$.

4.6. Dobrać parametr $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcje były ciągłe w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{y} & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},\ y \neq 0, \\ a & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},\ y = 0; \end{cases}$ **b)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$ **d)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}\left(x^2+ay^2\right)}{x^2+2y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Lista 5

5.1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x,y)=x^2-xy+1,\ (0,1)$; **b)** $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x},\ (1,1)$;

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases},\ (0,0)$;

d) $f(x,y,z)=\dfrac{xy^2}{z},\ \ (0,1,1)$; **e)** $f(x,y,z)=y\sqrt{\dfrac{z}{x}},\ \ (1,1,1)$.

5.2. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$; **b)** $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-xy}{x+y}$; **c)** $f(x,y)=e^{\sin\frac{y}{x}}$;

d) $f(x,y,z)=x^2+\dfrac{xz}{y}+yz^3$; **e)** $f(x,y,z)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$; **f)** $f(x,y,z)=\sin(x\cos(y\sin z))$.

5.3. Sprawdzić czy podana funkcja spełnia wskazane równanie:

a) $f(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right),\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=2$;

b) $f(x,y)=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{f}{2}$.

5.4. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji i sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe:

a) $f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right)$; **b)** $f(x,y)=xe^{xy}$; **c)** $f(x,y)=x+\dfrac{y}{x}$;

d) $f(x,y)=y\ln xy$; **e)** $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; **f)** $f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^4+z^6+1\right)$.

5.5. Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe funkcji:

a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\quad f(x,y)=\sin xy$; **b)** $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2\partial x\partial y},\quad f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$;

c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z},\quad f(x,y,z)=\dfrac{x^2y^3}{z}$; **d)** $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^2\partial z^2},\quad f(x,y,z)=e^{xy+z}$.

5.6. Sprawdzić, że funkcje:

a) $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$; **b)** $z=x+\sqrt{\dfrac{x}{y}}$;

c) $z=x+\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$; **d)** $z=x+\sqrt{xy}$

spełniają równanie

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad \text{gdzie } x,\ y>0.$$

Lista 6

6.1. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, z_0)$; **b)** $z = e^{x+2y}$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, z_0)$;

c) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $(x_0, y_0, z_0) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$; **d)** $z = x^y$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, z_0)$.

6.2. a) Na wykresie funkcji $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x + y - z = 5$.

b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{1 - xy}{x + y}$, która jest prostopadła do prostej $x = \dfrac{t}{2}$, $y = \dfrac{t}{2}$, $z = t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

6.3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

a) $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2$; **b)** $\sqrt[3]{(2.93)^3 + (4.05)^3 + (4.99)^3}$;

c) $2.97 \cdot e^{0.05}$; **d)** $\dfrac{\cos 0.05}{1.96}$.

6.4. a) Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego stożka?

b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

c) Oszacować błąd względny δ_V objętości prostopadłościamu V, jeżeli pomiaru jego boków x, y, z dokonano z dokładnością odpowiednio Δ_x, Δ_y, Δ_z.

6.5. Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem x i y podanych funkcji:

a) a) $z = f(u, v) = \ln \dfrac{u}{v+1}$, gdzie $u = x \sin y$, $v = x \cos y$;

b) $z = f(u, v, w) = \arcsin \dfrac{u}{v + w}$, gdzie $u = e^{\frac{x}{y}}$, $v = x^2 + y^2$, $w = 2xy$.

Lista 7

7.1. Sprawdzić czy podane funkcje spełniają wskazane równania:

a) $z = f\left(x^2+y^2\right), \quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$

b) $z = xf\left(\sin(x-y)\right), \quad \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{x};$

c) $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$, gdzie $n \in \mathbb{N}$;

d*) $z = \dfrac{x}{y}g(x) + h\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

7.2. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

a) $f(x,y) = 2|x| + |y|, \quad (x_0,y_0) = (0,0), \quad \vec{v} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);$

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}, \quad (x_0,y_0) = (1,0), \quad \vec{v} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right);$

c) $f(x,y,z) = x^2 + yz, \quad (x_0,y_0,z_0) = (-1,0,1), \quad \vec{v} = \left(\dfrac{3}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{12}{13}\right).$

7.3. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

a) $f(x,y) = x^2+y^2, \ (x_0,y_0) = (-3,4), \ \vec{v} = \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{13}\right);$

b) $f(x,y) = x - \dfrac{y}{x^2} + y, \ (x_0,y_0) = (1,1), \ \vec{v} = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right);$

c) $f(x,y,z) = a - e^{xyz}, \ (x_0,y_0,z_0) = (-1,1,-1), \ \vec{v} = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right);$

d) $f(x,y,z) = \sin yz + \cos xz - \sin\left(\cos xy\right), \ (x_0,y_0,z_0) = (0,0,0), \ \vec{v} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right).$

7.4. **a)** Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = y - x^2 + 2\ln(xy)$. w punkcie $\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$ w kierunku wersora $\vec{v}$ tworzącego kąt α z dodatnim zwrotem osi Ox. Dla jakiego kąta α, pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

b) Wyznaczyć wersory $\vec{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x+y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

Lista 8

8.1. Znaleźć ekstrema funkcji:

a) $f(x,y) = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2$;

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

c) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

d) $f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$;

e) $f(x,y) = xy^2(12 - x - y)$, gdzie $x, y > 0$;

f) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$; gdzie $x, y > 0$.

8.2. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $3x + 2y = 6$;

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x + 10$, $x - y^2 + 1 = 0$;

c) $f(x,y) = x^2 y - \ln x$, $8x + 3y = 0$;

d) $f(x,y) = 2x + 3y$, $x^2 + y^2 = 1$.

8.3. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

a) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 4\right\}$;

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant 4,\ 2x + y \leqslant 6,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}$;

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D = \left\{(x, y \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 2\right\}$;

d) $f(x,y) = xy^2 + 4xy - 4x$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leqslant x \leqslant 3,\ -3 \leqslant y \leqslant 0\right\}$;

e) $f(x,y) = x^4 + y^4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$;

f*) $f(x,y) = \dfrac{(x^2-1)(y^2-1)}{(x^2+y^2+2)^2}$, $D = \mathbb{R}^2$.

8.4. **a)** W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1,5)$, $B = (1,4)$, $C = (2,-3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

b) Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \qquad l : \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,\mathrm{zł/m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\,\mathrm{zł/m}^2$, a sufitu w cenie $20\,\mathrm{zł/m}^2$. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

f) Firma produkuje 32 i 40 calowe telewizory plazmowe w cenach zbytu odpowiednio 400 € i 600 € za sztukę. Koszty wyprodukowania x sztuk telewizorów 32 calowych i y 40 calowych wynoszą

$$K(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2 \text{ €}.$$

Ile sztuk telewizorów 32 i 40 calowych powinna wyprodukować firma aby osiągnąć jak największy zysk?

Lista 9

9.1. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

a) $\iint\limits_R \left(x + xy - x^2 - 2y\right) dxdy$, gdzie $R = [0,1] \times [0,1]$; **b)** $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, gdzie $R = [0,2] \times [0,1]$;

c) $\iint\limits_R x \sin xy \, dxdy$, gdzie $R = [0,1] \times [\pi, 2\pi]$; **d)** $\iint\limits_R e^{2x-y} \, dxdy$, gdzie $R = [0,1] \times [-1,0]$.

9.2. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o równaniach:

a) $x^2 + y = 2, \;\; y^3 = x^2$; **b)** $x^2 + y^2 = 4, \;\; y = 2x - x^2, \;\; x = 0 \; (x, y \geqslant 0)$;

c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$; **d)** $x^2 - y^2 = 1, \;\; x^2 + y^2 = 3 \; (x < 0)$.

9.3. Obliczyć całki iterowane:

a) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\, dy$; **b)** $\int\limits_1^4 dx \int\limits_x^{2x} x^2 \sqrt{y - x}\, dy$; **c)** $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^3 + y^3\right) dy$; **d)** $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y \sqrt{y^2 + 16}\, dx$.

Narysować obszary całkowania.

9.4. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

a) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{|x|} f(x,y)\, dy$; **b)** $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\, dy$; **c)** $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\, dy$;

d) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\, dx$; **e)** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\, dy$; **f)** $\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)\, dy$.

9.5. Obliczyć podane całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

a) $\iint\limits_D xy^2\, dxdy, \;\; D: \; y = x, \; y = 2 - x^2$;

b) $\iint\limits_D x^2 y\, dxdy, \;\; D: \; y = -2, \; y = \frac{1}{x}, \; y = -\sqrt{-x}$;

c) $\iint\limits_D (xy + x)\; dxdy, \;\; D: \; x = 0, \; y = -1, \; y = 3 - x^2 \; (x \geqslant 0)$;

d) $\iint\limits_D \left(xy + 4x^2\right) dxdy, \;\; D: \; y = x + 3, \; y = x^2 + 3x + 3$;

e) $\iint\limits_D (2x - 3y + 2)\; dxdy, \;\; D: \; y = 0, \; y = \pi, \; x = -1, \; x = \sin y$;

f) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\, dxdy, \;\; D: \; y = \sqrt{x}, \; x = 0, \; y = 1$;

g) $\iint\limits_D e^{x^2}\, dxdy, \;\; D: \; y = 0, \; y = 2x, \; x = \sqrt{\ln 3}$;

h) $\iint\limits_D x^2 e^{xy}\, dxdy, \;\; D: \; y = x, \; y = 1, \; x = 0.$

Lista 10

* **10.1.** Obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

a) $\displaystyle\iint\limits_D \min(x,y)\,dxdy$, gdzie $D=[0,1]\times[0,2]$;

b) $\displaystyle\iint\limits_D \lfloor x+y\rfloor\ dxdy$, gdzie $D=[0,2]\times[0,2]$;

c) $\displaystyle\iint\limits_D |x-y|\,dxdy$, gdzie $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 3-2x\right\}$;

d) $\displaystyle\iint\limits_D \operatorname{sgn}\left(x^2-y^2+2\right)\,dxdy$, gdzie $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant 4\right\}$.

Uwaga. Symbol $\min(a,b)$ oznacza mniejszą spośród liczb a,b, z kolei $\lfloor u\rfloor$ oznacza część całkowitą liczby u.

10.2. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

a) $f(x,y)=\sin x\cos y$, gdzie $D=[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

b) $f(x,y)=x+y$, gdzie $D:\ 0\leqslant y\leqslant\pi,\ 0\leqslant x\leqslant\sin y$.

10.3. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

a) $\displaystyle\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, gdzie $D:\ x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$;

b) $\displaystyle\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy$, gdzie $D:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1$;

c) $\displaystyle\iint\limits_D x^2\,dxdy$, gdzie $D:\ x^2+y^2\leqslant 2y$;

d) $\displaystyle\iint\limits_D y\,dxdy$, gdzie $D:\ x^2+y^2\leqslant 2x$;

e) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy$, gdzie $D:\ y\geqslant 0,\ y\leqslant x^2+y^2\leqslant x$;

f*) $\displaystyle\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, gdzie $D:\ x\geqslant 0,\ \left(x^2+y^2\right)^2\leqslant 4\left(x^2-y^2\right)$.

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych.

10.4. Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{x\,dxdydz}{yz}$, gdzie $U=[1,2]\times[1,e]\times[1,e]$;

b) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y+z)\ dxdydz$, gdzie $U=[1,2]\times[2,3]\times[3,4]$;

c) $\displaystyle\iiint\limits_U \sin x\sin(x+y)\sin(x+y+z)\ dxdydz$, gdzie $U=[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$;

d) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y)e^{x+z}\ dxdydz$, gdzie $U=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Lista 11

11.1. Całkę potrójną $\iiint\limits_U f(x,y,z)\;dxdydz$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

a) $z = 2\sqrt{x^2+y^2},\;\; z=6$; **b)** $x^2+y^2+z^2=25,\ z=4,\ (z \geqslant 4)$; **c)** $z = x^2+y^2,\;\; z=\sqrt{20-x^2-y^2}$.

11.2. W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania (rozważyć wszystkie przypadki):

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z)\;dz$; **b)** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\;dz$;

c) $\int\limits_0^3 dz \int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\;dy$; **d)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz$.

11.3. Obliczyć całki potrójne z danych funkcji po wskazanych obszarach:

a) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$, gdzie $U : x \leqslant 0,\ -x \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant -x$;

b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, gdzie $U : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y$;

c) $f(x,y,z) = x^2+y^2$, gdzie $U : x^2+y^2 \leqslant 4,\ 1-x \leqslant z \leqslant 2-x$;

d) $f(x,y,z) = x^2y^2$, gdzie $U : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$.

11.4. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

a) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 dxdydz$, gdzie $U : x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

b) $\iiint\limits_U xyz\,dxdydz$, gdzie $U : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

c) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, gdzie $U : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$;

d) $\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz$, gdzie $U : x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2-x-y$.

11.5. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

a) $\iiint\limits_U \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gdzie $U : 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$;

b) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, gdzie $U : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

c) $\iiint\limits_U z^2\,dxdydz$, gdzie $U : x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2\ (R>0)$;

d) $\iiint\limits_U x^2\,dxdydz$, gdzie $U : x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x$.

Lista 12

12.1. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

a) $y^2 = 4x, \quad x + y = 3, \quad y = 0 \ (y \geqslant 0);$ **b)** $x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4y = 0;$

c) $x + y = 4, \quad x + y = 8, \quad x - 3y = 0, \quad x - 3y = 5;$ **d)** $x^2 + y^2 = 2y, \quad y = \sqrt{3}|x|.$

12.2. Korzystając z całki podwójnej, obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

a) $x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0;$ **b)** $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0;$

c*) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \quad z = xy, \quad z = 0;$ **d*)** $2z = x^2 + y^2, \quad y + z = 4.$

12.3. Obliczyć pola płatów:

a) $z = x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 \leqslant 1;$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0, \ z \geqslant 0;$

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ 1 \leqslant z \leqslant 2.$

12.4. Korzystając z całki potrójnej, obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:

a) $x^2 + y^2 = 9, \ x + y + z = 1, \ x + y + z = 5;$ **b)** $x = -1, \ x = 2, \ z = 4 - y^2, \ z = 2 + y^2;$

c) $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}, \ z = 0, \ x^2 + y^2 = 1;$ **d)** $x^2 + y^2 + z^2 = 2, \ y = 1 \ (y \geqslant 1).$

12.5. Obliczyć masy podanych obszarów o wskazanych gęstościach:

a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\right\}$, gdzie $\sigma(x,y) = x;$

b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, \ y \geqslant 0\right\}$, gdzie $\sigma(x,y) = |x|;$

c) $U = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$, gdzie $\gamma(x,y,z) = x + y + z$ oraz $a, b, c > 0;$

d) $U : \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, gdzie $\gamma(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$

12.6. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

a) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;

b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\right\};$

c) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leqslant y \leqslant 1\right\};$

d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant e^x\right\};$

e) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x, \ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x\right\};$

f) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H;

g) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - x^2 - y^2}\right\}.$

12.7. Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów względem wskazanych osi:

a) D – kwadrat jednorodny o boku a, przekątna kwadratu, przyjąć $\sigma(x,y) = 1;$

b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant R^2, \ y \geqslant 0\right\}$, oś Ox, przyjąć $\sigma(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2};$

c) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\right\}$, oś symetrii obszaru, przyjąć $\sigma(x,y) = x^2;$

d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\right\}$, oś Ox, przyjąć $\sigma(x,y) = x.$

12.8. Obliczyć momenty bezwładności względem wskazanych osi podanych obszarów jednorodnych o masie M:

a) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, względem osi walca;

b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H, względem osi stożka;

c) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, względem średnicy podstawy.

Lista 13

13.1. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Uwaga. W przykładzie **b)** przyjąć, że $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_k$, gdzie $n\geqslant 2$.

13.2. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

13.3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^3-1}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n-1}$; **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$.

13.4. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+2}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+\sin n!}{3^n}$; **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-2\cos n^2}{\sqrt{n}}$; **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{n3^n+2^n}$.

13.5. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$; **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^5+1}$.

Lista 14

14.1. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2+1)^n}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,cos}^n \frac{1}{n^2}$.

14.2. Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{7^n}{n^5} = \infty$; **b)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$; **c)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; **d*)** $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!} = 0$.

14.3. Zbadać zbieżność szeregów naprzemiennych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+5}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(2n+3)^n}$;

c) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n \ln\ln n}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$.

14.4. Obliczyć sumy przybliżone podanych szeregów ze wskazaną dokładnością:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n10^n}$, $\delta = 10^{-6}$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$, $\delta = 10^{-3}$.

14.5. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n+1}$; **b)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$;

d) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3}-1\right)$; **e)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+1}$; **f*)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{n+1}$.

Lista 15

15.1. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3}$;

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$; **f*)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$.

15.2. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

a) $\frac{2}{1-3x}$; **b)** $\cos\frac{x}{2}$; **c)** xe^{-2x};

d) $\frac{x}{9+x^2}$; **e)** $\operatorname{sh} x$; **f*)** $\sin^4 x$.

15.3. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć pochodne:

a) $f^{(50)}(0)$, gdzie $f(x) = x\sin x$; **b)** $f^{(2006)}(0)$, gdzie $f(x) = \frac{x}{e^x}$;

c) $f^{(21)}(0)$, gdzie $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$; **d)** $f^{(10)}(0)$, gdzie $f(x) = \sin^2 3x$.

15.4. Wyznaczyć szeregi potęgowe funkcji $f'(x)$ oraz $\int\limits_0^x f(t)\,dt$, jeżeli funkcja f określona jest wzorem:

a) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$; **b)** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

15.5. Stosując twierdzenia o różniczkowaniu i/lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy szeregów:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$.

15.6. Obliczyć podane całki oznaczone ze wskazaną dokładnością:

a) $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$, $\delta = 0.001$; $\int\limits_0^1 \sin x^2\,dx$, $\delta = 0.0001$.

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. Zbigniew Skoczylas
Konsultacja: dr Jolanta Sulkowska