ALGEBRA LINIOWA 1

Lista zadań

2003/2004

Opracowanie: dr Teresa Jurlewicz, dr Zbigniew Skoczylas

Zadania z tej listy znajdują się w obecnym oraz poprzednich wydaniach książki *„Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania"*. Każde z zadań ma tam swój odpowiednik w postaci dokładnie rozwiązanego przykładu. Do wszystkich zadań dołączono odpowiedzi. Zakres materiału z poprzedniej tzw. *standardowej listy zadań* (realizowanej w roku akademickim 2002/3) poszerzono o rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego. Zrezygnowano z podziału na 14 jednostek na rzecz układu merytorycznego.

1. Liczby zespolone

○ **Zadanie 1.1** * **[1.1]**†

Wykonać podane działania:

a) $(1-3i)+(4-5i)$; **b)** $\left(1+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-6i\right)$;

c) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}i\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}i\right)$; **d)** $\dfrac{2+3i}{1+i}$;

e) $z\cdot\overline{w}$, $\dfrac{z^2}{w}$, $\dfrac{z-w}{\overline{z}+\overline{w}}$, $\dfrac{\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im} w}{z+w}$ dla $z=5-2i$, $w=3+4i$.

○ **Zadanie 1.2** **[1.2]**

Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające podane równania:

a) $x(2+3i)+y(5-2i)=-8+7i$; **b)** $(2+yi)\cdot(x-3i)=7-i$;

c) $\dfrac{1+yi}{x-2i}=3i-1$; **d)** $\dfrac{x+yi}{x-yi}=\dfrac{9-2i}{9+2i}$.

○ **Zadanie 1.3** **[1.3]**

W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

a) $z^2=4\overline{z}$; **b)** $\dfrac{1+i}{z}=\dfrac{2-3i}{\overline{z}}$; **c)** $z^2-4z+13=0$;

d) $(z+2)^2=(\overline{z}+2)^2$; **e)** $2z+\overline{z}=6-5i$; **f)** $(1+i)z+3(z-i)=0$;

g) $\dfrac{2+i}{z-1+4i}=\dfrac{1-i}{2z+i}$; **h)** $\overline{z+i}-z+i=0$; **i*)** $z^3-6iz^2-12z+8i=0$.

○ **Zadanie 1.4** **[1.5]**

Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających podane warunki:

a) $\operatorname{Re}(iz+2)\geqslant 0$; **b)** $\operatorname{Im} z^2<0$;

c) $\overline{z-i}=z-1$; **d)** $\dfrac{4}{z}=\overline{z}$;

e) $z\overline{z}+(5+i)z+(5-i)\overline{z}+1=0$; **f)** $\operatorname{Im}\dfrac{1+iz}{1-iz}=1$.

○ **Zadanie 1.5** **[1.6]**

Niech $u=\dfrac{z+4}{z-2i}$, $v=\dfrac{z}{iz+4}$, gdzie $z\in\mathbf{C}$. Naszkicować zbiór wszystkich liczb zespolonych z, dla których:

a) liczba u jest rzeczywista; **b)** liczba u jest czysto urojona;

c) liczba v jest rzeczywista; **d)** liczba v jest czysto urojona.

○ **Zadanie 1.6** **[1.7]**

Punkty z_1, z_2, z_3 płaszczyzny zespolonej są wierzchołkami trójkąta. Wyznaczyć położenie punktu przecięcia środkowych tego trójkąta.

Wskazówka. Wykorzystać fakt, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołka.

○ **Zadanie 1.7** **[2.1]**

Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:

a) $-\sqrt{3}i$; **b)** $6-8i$; **c)** $\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}i$;

d) $1+i\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$; **e)** $\dfrac{1+3i}{3-4i}$.

---

*Numeracja zadań z książki *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, wydanie IX.

†Numeracja zadań z książki *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, wydanie VIII.

○ **Zadanie 1.8** **[2.2]**

Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $|z-3+4i|=1$; **b)** $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right|=1$; **c)** $2\leqslant|iz-5|<3$;

d) $|z+1-2i|\geqslant 3$ oraz $|z-3|<4$; **e)** $\left|\frac{z+i}{z^2+1}\right|\geqslant 1$; **f)** $\sin\left(\pi|z+2i|\right)>0$;

g*) $3|z+i|\leqslant\left|z^2+1\right|<5|z-i|$; **h)** $\left|\overline{z}-1+3i\right|\leqslant 5$.

○ **Zadanie 1.9** **[2.4]**

Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

a) $7+7i$; **b)** $\sqrt{3}-i$; **c)** $-5+5\sqrt{3}i$;

d) $\sin\alpha+i\cos\alpha$; **e)** $-\cos\alpha+i\sin\alpha$; **f)** $1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Uwaga. W ćwiczeniach **d)**, **e)**, **f)** kąt α spełnia nierówności $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

○ **Zadanie 1.10** **[2.5]**

Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $\arg z=\frac{5\pi}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{6}<\arg(z+3i)<\frac{\pi}{3}$;

c) $\pi\leqslant\arg(iz)<2\pi$; **d)** $\arg\left(z^6\right)=\pi$;

e) $\frac{\pi}{3}\leqslant\arg(-z)\leqslant\frac{\pi}{2}$; **f*)** $\arg\left(\overline{z}-1-2i\right)=\frac{3\pi}{2}$.

○ **Zadanie 1.11** **[2.6]**

Obliczyć wartości podanych wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

a) $(1-i)^{12}$; **b)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^8$; **c)** $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{30}$;

d) $\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$; **e)** $\frac{(1+i)^{22}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}$; **f)** $\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{24}$.

○ **Zadanie 1.12** **[2.7]**

Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

a) $\sin 3x$ przez funkcję $\sin x$; **b)** $\cos 4x$ przez funkcje $\sin x$ i $\cos x$;

c*) $\mathrm{tg}\,6x$ przez funkcję $\mathrm{tg}\,x$; **d*)** $\mathrm{ctg}\,5x$ przez funkcję $\mathrm{ctg}\,x$.

○ **Zadanie 1.13** **[2.8]**

Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $\mathrm{Im}\left(z^3\right)<0$; **b)** $\mathrm{Re}\left(z^4\right)\geqslant 0$;

c) $\mathrm{Im}\left(z^2\right)\geqslant\mathrm{Re}\left[(\overline{z})^2\right]$; **d)** $\mathrm{Im}\,\frac{(1+i)\,z}{(1-i)\overline{z}}\geqslant 0$.

○ **Zadanie* 1.14** **[2.9]**

Wykorzystując wzór na sumę wyrazów zespolonego ciągu geometrycznego obliczyć:

a) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$; **b)** $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$;

c) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$; **d)** $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x$;

e) $1+(1-i)+(1-i)^2+\ldots+(1-i)^n$;

f) $\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{2m}$, gdzie $n\in\boldsymbol{N}$ oraz $m=E\left(\frac{n}{2}\right)$.

○ **Zadanie 1.15** **[3.1]**

Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej rozwiązać podane równania:

a) $z^7=\overline{z}$; **b)** $\overline{\left(z^4\right)}=z^2\left|z^2\right|$; **c)** $(\overline{z})^2\left|z^2\right|=\frac{4}{z^2}$;

d) $|z|^3=iz^3$; **e)** $z^6=(\overline{z})^6$; **f)** $\left|z^8\right|=z^4$.

○ **Zadanie 1.16** **[3.2]**

Stosując wzory Eulera wyrazić podane funkcje w postaci sum sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x:

a) $\sin^3 x$; **b)** $\cos^2 x$; **c)** $\sin^5 x$; **d)** $\sin^4 x+\cos^4 x$.

○ **Zadanie 1.17** **[3.3]**

Korzystając z definicji obliczyć podane pierwiastki:

a) $\sqrt{5-12i}$; **b)** $\sqrt{-11+60i}$; **c)** $\sqrt[3]{i}$; **d)** $\sqrt[4]{16}$.

○ **Zadanie 1.18** **[3.4]**

Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

a) $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$; **b)** $\sqrt[3]{-27i}$; **c)** $\sqrt[4]{-4}$; **d)** $\sqrt[6]{-64}$;

e) $\sqrt[5]{32i}$; **f)** $\sqrt[3]{-1+i}$; **g*)** $\sqrt[4]{i}$; **h*)** $\sqrt[3]{2+2i}$.

○ **Zadanie 1.19** **[3.5]**

Odgadując jeden z elementów podanych pierwiastków obliczyć pozostałe elementy tych pierwiastków:

a) $\sqrt{(5-4i)^4}$; **b)** $\sqrt[4]{(-2+3i)^4}$; **c)** $\sqrt[3]{(2-i)^6}$; **d)** $\sqrt[3]{(2-2i)^9}$.

○ **Zadanie 1.20** **[3.6]**

Jednym z wierzchołków kwadratu jest punkt $z_1=4-i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu, jeżeli jego środkiem jest:

a) początek układu współrzędnych; **b)** punkt $u=1$;

c) punkt $u=3+i$; **d)** punkt $u=7+\sqrt{2}i$.

○ **Zadanie 1.21** **[3.7]**

Znaleźć rozwiązania podanych równań:

a) $z^4=(1-i)^4$; **b)** $(z-1)^6=(i-z)^6$; **c)** $z^3=(iz+1)^3$.

2. Wielomiany

○ **Zadanie 2.1** **[4.1]**

Obliczyć iloczyny podanych par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

a) $P(x)=x^4-3x^3+x-1,\ Q(x)=x^2-x+4$;

b) $W(z)=z^3+5z^2-iz+3,\ V(z)=(1+i)z-2$.

○ **Zadanie 2.2** **[4.2]**

Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzieleń wielomianów P przez wielomiany Q, jeżeli:

a) $P(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6,\ Q(x)=x^2-3x+1$;

b) $P(x)=x^{16}-16,\ Q(x)=x^4+2$;

c) $P(z)=z^5-z^3+1,\ Q(z)=(z-i)^3$.

○ **Zadanie 2.3** **[4.3]**

Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$; **b)** $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$;
c) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$; **d)** $x^4 + 3x^3 - x^2 + 17x + 99$.

○ **Zadanie 2.4** **[4.4]**

Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

a) $x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$; **b)** $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1$;
c) $4x^3 + x - 1$; **d)** $x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

○ **Zadanie 2.5** **[4.5]**

Znaleźć pierwiastki podanych równań kwadratowych i dwukwadratowych:

a) $z^2 - 4z + 13 = 0$; **b)** $z^2 - (3-2i)z + (5-5i) = 0$;
c) $z^4 + 8z^2 + 15 = 0$; **d)** $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

○ **Zadanie 2.6** **[4.6]**

Znając niektóre pierwiastki podanych wielomianów rzeczywistych, znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

a) $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2},\ x_1 = \sqrt{2} + i$;

b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30,\ x_1 = 1 - 3i$;

c) $W(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25,\ x_1 = 2 + i$;

d) $W(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 4,\ x_1 = i,\ x_2 = -\sqrt{2}i$;

e) $W(x) = x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 22x + 14,\ x_1 = 1 - i,\ x_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

○ **Zadanie 2.7** **[4.7]**

Nie wykonując dzieleń znaleźć reszty z dzieleń wielomianów P przez wielomiany Q, jeżeli:

a) $P(x) = x^8 - 3x^3 + 5x$, $Q(x) = x^2 - x - 2$;
b) $P(x) = x^{14} - 4x^{10} + x^2 + \sqrt{2}x$, $Q(x) = x^2 + 2$;
c) $P(x) = x^{30} + 3x^{14} + 2$, $Q(x) = x^3 + 1$;
d) $P(x) = x^{100} + 2x^{51} - 3x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$;
e) $P(x) = x^5 + x - 2$, $Q(x) = x^2 - 2x + 5$;
f) $P(x) = x^6 + x - 50$, $Q(x) = x^3 + 8$.

○ **Zadanie 2.8** **[5.1]**

Podać przykłady wielomianów zespolonych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

a) liczby $0, 1-5i$ są pierwiastkami pojedynczymi, a liczby $-1, -3+i$ są pierwiastkami podwójnymi tego wielomianu;

b) liczba $-4i$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczby $3, -5$ pierwiastkami potrójnymi tego wielomianu.

○ **Zadanie 2.9** **[5.2]**

Podać przykłady wielomianów rzeczywistych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

a) liczby $1, -5, -\sqrt{2}$ oraz $1 - 3i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;

b) liczba $1 + i$ jest pierwiastkiem pojedynczym, liczby $-i$ oraz 3 są pierwiastkami podwójnymi, a liczba $-4 + 3i$ jest pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu.

○ **Zadanie 2.10** **[5.3]**

Podane wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

a) $z^2 - 2iz - 10$; **b)** $z^4 + 5z^2 + 6$; **c)** $z^3 - 6z - 9$.

○ **Zadanie 2.11** **[5.4]**

Podane wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

a) $x^6 + 8$; **b)** $x^4 + 4$;
c) $x^4 - x^2 + 1$; **d)** $4x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 9x - 9$.

○ **Zadanie 2.12** **[5.5]**

Podane funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

a) $\dfrac{z^5 - 3z^2 + z}{z^3 + 4z^2 + 1}$; **b)** $\dfrac{x^5 + 3}{x^5 + 4}$; **c)** $\dfrac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$.

○ **Zadanie* 2.13** **[5.6]**

Zaproponować rozkłady podanych zespolonych funkcji wymiernych właściwych na zespolone ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

a) $\dfrac{z^3 + i}{z^2 (z - 2i)^3}$; **b)** $\dfrac{z^2 + z + 5}{(z+1)(z+i)^2 [z - (1+i)]^3}$; **c)** $\dfrac{iz + 7}{(z^4 - 4)^2}$.

○ **Zadanie 2.14** **[5.7]**

Zaproponować rozkłady podanych rzeczywistych funkcji wymiernych właściwych na rzeczywiste ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

a) $\dfrac{x^2 + 2x - 7}{x^3(x-1)(x+5)^2}$; **b)** $\dfrac{x^3 - 8x - 4}{(x^2+4)(x^2+x+3)^3}$; **c)** $\dfrac{x^4 + x^3}{(x+3)^2 (x^2 - 4x + 5)^2}$.

○ **Zadanie* 2.15** **[5.8]**

Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

a) $\dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)(z+3)}$; **b)** $\dfrac{z}{(z^2-1)^2}$;
c) $\dfrac{16i}{z^4 + 4}$; **d)** $\dfrac{z^2 + 2z}{(z^2 + 2z + 2)^2}$.

○ **Zadanie 2.16** **[5.9]**

Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

a) $\dfrac{12}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$; **b)** $\dfrac{x^2}{x^4 - 1}$; **c)** $\dfrac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}$;
d) $\dfrac{x^2 + 2x}{(x^2 + 2x + 2)^2}$; **e)** $\dfrac{1}{x^3 + x}$; **f)** $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 (x+1)^2}$.

3. Macierze i wyznaczniki

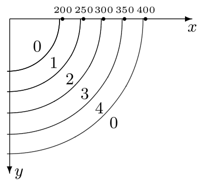
○ **Zadanie 3.1** **[6.1]**

a) Zaproponować opis, w formie macierzy złożonej z liczb całkowitych, położenia figur w grze w szachy. W jaki sposób można by sprawdzić, czy dana macierz odzwierciedla pozycję możliwą do uzyskania w czasie gry?

b) Zaproponować zapis, w postaci jednej macierzy, odległości drogowych i kolejowych w km między stolicami wszystkich województw w Polsce.

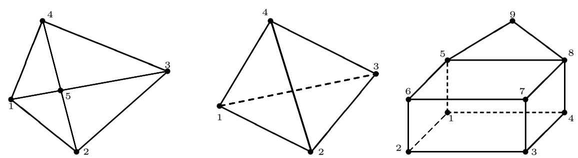
c) Ekran monitora komputerowego jest złożony z 1024×768 punktów. Każdy punkt może świecić jednym z 20 kolorów. Kolorowe obrazy na ekranie można zapisywać w postaci macierzy złożonej z liczb całkowitych. Założyć, że ekran monitora przedstawia pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych, z początkiem układu w lewym górnym rogu ekranu. Zapisać w formie macierzy przybliżony kształt ćwiartki kolorowej tęczy złożonej z pierścieni kołowych (rysunek).

Na rysunku:
- 0 – oznacza kolor biały,
- 1 – oznacza kolor niebieski,
- 2 – oznacza kolor zielony,
- 3 – oznacza kolor żółty,
- 4 – oznacza kolor czerwony.



d) Na rysunkach przedstawiono konstrukcje prętowe z ponumerowanymi węzłami:

1) płaski czworokąt z przekątnymi; 2) czworościan; 3) konstrukcja przestrzenna



Zapisać w postaci macierzy schemat bezpośrednich połączeń między węzłami.

○ Zadanie 3.2 [6.2]

Obliczyć:

a) $2\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 3.3 [6.3]

Rozwiązać podane równania macierzowe i układy równań macierzowych:

a) $X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right)$;

b) $2Y \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$

○ Zadanie 3.4 [6.4]

Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy A, następnie wysunąć hipotezę o postaci macierzy A^n, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R}$; **d)** $A = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{bmatrix}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$;

e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **f*)** $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$;

g*) $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = 0$ dla $i \geqslant j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

○ Zadanie 3.5 [6.5]

Układając odpowiednie układy równań znaleźć wszystkie macierze zespolone X spełniające podane równania macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $X = X^T\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$;

c) $X - iX^T = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 6-2i & -2 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;

g) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; **h)** $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

i) $X \cdot X^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, X jest tu macierzą stopnia 2; **j)** $X \cdot X^T = X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 3.6 [6.6]

Korzystając z własności działań z macierzami oraz własności operacji transponowania macierzy uzasadnić podane tożsamości:

a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, gdzie A, B, C są macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times m$, $m \times k$, $k \times l$;

b) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$, gdzie A i B są przemiennymi macierzami kwadratowymi tych samych stopni.
Uwaga. Mówimy, że macierze A i B są przemienne, gdy spełniają warunek $AB = BA$.

c*) $(A+I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}A + \binom{n}{n}I$,
gdzie A i I są macierzami kwadratowymi tych samych stopni, przy czym I jest macierzą jednostkową.

○ Zadanie 3.7 [7.1]

Obliczyć podane wyznaczniki drugiego i trzeciego stopnia:

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

○ Zadanie 3.8 [7.2]

Napisać rozwinięcia Laplace'a podanych wyznaczników względem wskazanego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} i & 1+i & 2 \\ 1-2i & 3 & -i \\ -4 & 1-i & 3+i \end{vmatrix}$, trzecia kolumna; **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, drugi wiersz.

○ Zadanie 3.9 [7.3]

Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinąć względem wiersza lub kolumny z największą liczbą zer.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

○ Zadanie* 3.10 [7.4]

Korzystając z zasady indukcji matematycznej uzasadnić podane tożsamości (n oznacza stopień wyznacznika):

a) $W_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{4^{n+1}-1}{3}$; **b)** $W_{2n} = \begin{vmatrix} a & \dots & 0 & 0 & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a & b & \dots & 0 \\ 0 & \dots & b & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} = \left(a^2-b^2\right)^n$;

c) $W_n = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin\left[(n+1)x\right]}{\sin x}$,

gdzie $x \neq k\pi$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

○ Zadanie 3.11 [7.5]

Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązania podanych równań:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & x & -3 & 4x \\ 1 & -2 & x & -4 \\ -1 & x & -x & x+3 \end{vmatrix} = 0$.

○ Zadanie 3.12 [8.1]

Obliczyć podane wyznaczniki wykorzystując występujące w nich regularności:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

○ Zadanie 3.13 [8.2]

Obliczyć podane wyznaczniki stopnia $n \geqslant 2$ wykorzystując występujące w nich regularności:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$; **c*)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}$.

○ Zadanie 3.14 [8.3]

Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; **e)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **f)** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

○ Zadanie* 3.15 [8.4]

Korzystając z algorytmu Chió obliczyć podane wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

○ Zadanie 3.16 [8.5]

Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R}$; **c)** $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 3.17 [8.6]

Korzystając z metody bezwyznacznikowej obliczyć macierze odwrotne do podanych:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 3.18 [8.7]

Rozwiązać podane równania macierzowe wykorzystując operację odwracania macierzy:

a) $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4 \cdot X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; **d)** $3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X$.

○ Zadanie 3.19 [8.8]

Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:

a) $A^2 = 8A^{-1}$; **b)** $A^3 - A = \mathbf{0}$; **c)** $A^T = 4A^{-1}$?

4. Układy równań liniowych

○ Zadanie 4.1 [9.1]

Dla jakich wartości parametru $p \in \boldsymbol{R}$ podane układy równań są układami Cramera:

a) $\begin{cases} (p+1)x - py = 1 \\ 2x + (p-1)y = 3p \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2px + 4y - pz = 4 \\ 2x + y + pz = 1 \\ (4+2p)x + 6y + pz = 3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} px + 3y + pz = 0 \\ -px + 2z = 3 \\ x + 2y + pz = p \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x - y - z - t = px \\ -x + y - z - t = py \\ -x - y + z - t = pz \\ -x - y - z + t = pt \end{cases}$?

○ Zadanie 4.2 [9.2]

Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.3 [9.3]

Stosując wzór Cramera obliczyć niewiadomą y z podanych układów równań:

a) $\begin{cases} 3x + 7y + 2z + 4t = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 3y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + 3z + t = 1 \end{cases}$;

c) $x + 2y - 4 = 3y + 4z - 6 = 5z + 6s = 7s + 8t = x + y + z + s + t - 2 = 0$.

○ Zadanie 4.4 [9.4]

Rozwiązać podane układy równań metodą macierzy odwrotnej:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} y + z + t = 4 \\ x + z + t = -1 \\ x + y + t = 2 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.5 [5.1#] ‡

Znaleźć rzędy podanych macierzy wskazując niezerowe minory maksymalnych stopni:

a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

‡ Numeracja zadań z książki *Algebra liniowa 2. Przykłady i zadania*, wydanie IV.

○ Zadanie 4.6 [5.2#]

Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych macierzy obliczyć ich rzędy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 45 & 15 & 30 & -60 & 75 \\ 5 & 3 & 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$; **f*)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 4.7 [5.3#]

Sprowadzając podane macierze do postaci schodkowej wyznaczyć ich rzędy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 13 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & 14 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $A = [a_{ij}]$ jest macierzą wymiaru 5×7, gdzie $a_{ij} = i + j$ dla $1 \leqslant i \leqslant 5$, $1 \leqslant j \leqslant 7$;

d) $B = [b_{ij}]$ jest macierzą wymiaru 6×6, gdzie $b_{ij} = i^2 j$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant 6$.

○ Zadanie 4.8 [5.5#]

Znaleźć rzędy podanych macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & p \\ 3 & p & 3 \\ 2p & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & p & 2 \\ 1 & -2 & 7+p \\ 1 & 2+2p & -3-p \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p \\ 1 & p & p & p \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} p & -p & 1 & -p \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & p & 3 & p \\ p & 1 & p & 1 \end{bmatrix}$; **f*)** $\begin{bmatrix} p^2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 2|p| & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 2|p| & 2^p & 4 \end{bmatrix}$

○ Zadanie 4.9 [6.1#]

W podanych układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz liczby parametrów:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 4 \\ 4x + 8y = 11 \\ x + 4y = 10 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 5x - 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 2x - 3y - z + t = -1 \\ x + 7y - t = 4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 7 \\ x - t = 2 \\ -x - 3y + 2z + 2t = 3 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.10 [6.2#]

Wskazać wszystkie możliwe zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami określającymi rozwiązania podanych układów równań liniowych:

a) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -1 \\ -x + 8y + 11z + 12t = 5 \\ 2x - y - z = -4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.11 [6.3#]

Określić liczby rozwiązań podanych układów równań liniowych w zależności od parametru rzeczywistego p:

a) $\begin{cases} (p+1)x + (2-p)y = p \\ (1-3p)x + (p-1)y = -6 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} (p+1)x - y + pz = 1 \\ (3-p)x + 4y - pz = -4 \\ px + 3y = -3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} px + y + 2z = 1 \\ x + py + 2z = 1 \\ x + y + 2pz = 1 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x + py + pz + pt = 1 \\ 2x + 2y + pz + pt = 2 \\ 2x + 2y + 2z + pt = 3 \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x + (p-2)y - 2pz = 4 \\ px + (3-p)y + 4z = 1 \\ (1+p)x + y + 2(2-p)z = 7 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.12 [6.6#]

W wytwórni montuje się wyroby A, B, C, D, E z czterech typów detali a, b, c, d. Liczby detali wchodzących w skład poszczególnych wyrobów podane są w tabeli

	A	B	C	D	E
a	1	2	0	4	1
b	2	1	4	5	1
c	1	3	3	5	4
d	1	1	2	3	1

.

a) Czy można obliczyć, ile ważą wyroby D i E, jeżeli wyroby A, B, C ważą odpowiednio 12, 20 i 19 dag. Podać znalezione wagi.

b) Ile ważą detale a, b, c, jeżeli detal d waży 1 dag?

○ Zadanie 4.13 [9.5]

Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.14 [9.6]

Stosując „metodę kolumn jednostkowych" rozwiązać podane układy Cramera:

a) $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + z + s = 0 \\ y + z + s + t = 4 \\ x + z + t = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x + 3y + 2z - t = 3 \\ 2x + y + z + 2s + 3t = 6 \\ 3x - z + s + t = 3 \\ y + 4s + t = 1 \\ 2x + y + z - 2s + 5t = 8 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.15 [10.1]

Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 8z = 19 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.16 [10.2]

Rozwiązać podane układy równań „metodą kolumn jednostkowych":

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z - t = 0 \\ 5x - y + z + 2t = -4 \\ 7x + 8y + z - 7t = 6 \\ x - y + z + 2t = 4 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x + 3y + z - 2s - t = 6 \\ 4x + 7y + 2z - 5s + t = 17 \\ 6x + 5y + 3z - 2s - 9t = 1 \\ 2x + 6y + z - 5s - 10t = 12 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x + y - 2t = 1 \\ 5x + 2y + 2z - t = 5 \\ x - y - 2t = -5 \\ 5x + y + z - 3t = 0 \\ -7x - 3y + z + 5t = -4 \\ 4x + y - 2z - 5t = -2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \\ -2x + 6y + 2z + 4s = 10 \\ -2x + 6y + 4z + 4s + t = 10 \\ -x + 3y + z + 2s = 5 \end{cases}$.

○ Zadanie 4.17 [10.3]

Dla jakich wartości parametru p podane układy równań mają dokładnie jedno rozwiązanie? Określić liczby rozwiązań tych układów w pozostałych przypadkach:

a) $\begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 4y - 2z = -p \\ 3x + 5y - pz = 3 \\ px + 3py + z = p \end{cases}$.

○ Zadanie 4.18 [10.4]

Wykonanie pewnego pojemnika wymaga wykonania czterech czynności: narysowania formy, wycięcia, złożenia modelu i jego pomalowania. Liczby poszczególnych czynności w kolejnych dniach pracy pewnego pracownika podaje tabela:

	rysowanie	wycinanie	składanie	malowanie
poniedziałek	30	20	10	5
wtorek	20	15	15	10
środa	40	25	20	20
czwartek	30	20	20	20

Obliczyć czas wykonywania poszczególnych czynności, jeżeli w kolejnych dniach łączny czas pracy wynosił odpowiednio 2 h 10 min, 2 h 15 min, 3 h 55 min, 3 h 30 min.

5. Geometria analityczna w przestrzeni

○ Zadanie 5.1 [11.1]

Obliczyć długości podanych wektorów:

a) $\vec{a} = (3, -4, 12)$; **b)** $\vec{b} = \left(\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2}\right)$;

c) $\vec{c} = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, h)$, gdzie $\varrho \geqslant 0$ oraz $\varphi, h \in \boldsymbol{R}$;

d) $\vec{d} = (\varrho\cos\varphi\cos\psi, \varrho\sin\varphi\cos\psi, \varrho\sin\psi)$, gdzie $\varrho \geqslant 0$ oraz $\varphi, \psi \in \boldsymbol{R}$.

○ Zadanie 5.2 [11.2]

Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ tworzą dwa sąsiednie boki trójkąta. Wyrazić środkowe tego trójkąta przez wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

○ Zadanie 5.3 [11.3]

Znaleźć wersor $\vec{u}$, który:

a) leży w płaszczyźnie xOy i tworzy kąt α z dodatnią częścią osi Ox;

b) tworzy z dodatnimi częściami osi Ox, Oy, Oz odpowiednio kąty α, β, γ;

c) tworzy jednakowe kąty z wektorami $\vec{a} = (0, 3, -4)$, $\vec{b} = (8, 6, 0)$ i jest położony w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory.

○ Zadanie 5.4 [11.4]

Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów:

a) $\vec{a} = (1, -2, 5)$, $\vec{b} = (3, -1, 0)$;

b) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$;

c*) $\vec{x} = \vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{y} = 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$, gdzie $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ są wersorami parami prostopadłymi.

○ Zadanie 5.5 [11.5]

Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary kątów między:

a) wektorami $\vec{a} = (-3, 0, 4)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$;

b) wusiecznymi kątów utworzonych przez osie Ox, Oy oraz osie Oy, Oz układu $Oxyz$;

c) przekątnymi równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, $\vec{w} = (3, 1, 5)$.

○ Zadanie 5.6 [11.6]

Obliczyć długość rzutu prostokątnego wektora $\vec{a} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}\right)$ na wektor $\vec{b} = \left(-\sqrt{8}, 0, \sqrt{5}\right)$.

○ Zadanie 5.7 [11.7]

Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:

a) $\vec{a} = (-3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 5, -2)$; **b)** $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$;

c*) $\vec{x} = 2\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{y} = \vec{p} + 3\vec{q} + 4\vec{r}$, gdzie $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ są parami prostopadłymi wersorami o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

○ Zadanie 5.8 [11.8]

Obliczyć pola podanych powierzchni:

a) równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, -2, 5)$;

b) trójkąt o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, -3)$, $C = (2, 2, 1)$;

c) czworościan rozpięty na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

○ Zadanie 5.9 [11.9]

Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 4)$. Obliczyć wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

○ Zadanie 5.10 [12.1]

Obliczyć iloczyny mieszane podanych trójek wektorów:

a) $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -5)$, $\vec{c} = (2, 3, -4)$;

b) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

○ Zadanie 5.11 [12.2]

Obliczyć objętości podanych wielościanów:

a) równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$, $\vec{c} = (2, 5, -1)$;

b) czworościan o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, -1)$, $D = (-1, 3, 5)$;

c*) równoległościan o przekątnych $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

○ Zadanie 5.12 [12.3]

Sprawdzić, czy

a) wektory $\vec{a} = (-1, 3, -5)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (4, -2, 0)$ są współpłaszczyznowe;

b) punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

○ Zadanie 5.13 [12.4]

Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn spełniających podane warunki:

a) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -2, 0)$ i jest prostopadła do wektora $\vec{n} = (0, -3, 2)$;

b) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 2, 3)$, $P_3 = (-1, -3, 5)$;

c) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (1, -3, 4)$, $P_2 = (2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny xOz;

d) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$;

e) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 3, 0)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2 = 0$;

f) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y = 0$, $\pi_2 : y - z = 0$.

○ Zadanie 5.14 [12.5]

Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostych spełniających podane warunki:

a) prosta przechodzi przez punkt $P = (-3, 5, 2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (2, -1, 3)$;

b) prosta przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 0, 6)$, $P_2 = (-2, 2, 4)$;

c) prosta przechodzi przez punkt $P = (0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2z - 6 = 0$;

d) prosta przechodzi przez punkt $P = (7, 2, 0)$ i jest prostopadła do wektorów $\vec{v}_1 = (2, 0, -3)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 0)$;

e) prosta jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{5}, \qquad l_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z}{3};$$

f*) prosta jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \qquad l_2 : \frac{x+6}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+29}{-12}.$$

○ Zadanie 5.15 [12.6]

Zbadać, czy

a) punkty $A = (1,2,3)$, $B = (-1,-2,0)$ należą do prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R};$$

b) prosta $m : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie

$$\pi : 5y - 3z + 13 = 0;$$

c) punkty $A = (0,1,5)$, $B = (1,2,3)$ należą do płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + t, \\ y = 2 + 3s - t, \\ z = 3 - s + 2t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \boldsymbol{R};$$

d) proste $l_1 : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+4}{-8}$, $l_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ mają punkt wspólny;

e) prosta $l : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \boldsymbol{R}$, jest równoległa do płaszczyzny

$$\pi : x + y - z + 3 = 0.$$

○ Zadanie 5.16 [12.7]

Znaleźć punkty przecięcia:

a) prostych $l_1 : \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ y + z - 3 = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} 2x - y - 2z + 8 = 0, \\ x + 2y + 2z - 5 = 0; \end{cases}$

b) prostej $l : \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$ i płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = s + t, \\ y = 1 + s + 2t, \\ z = 3 + 2s + 4t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \boldsymbol{R};$$

c) płaszczyzn $\pi_1 : 3x + y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + 2z + 6 = 0$, $\pi_3 : 3y + 2z = 0$.

○ Zadanie 5.17 [13.1]

Obliczyć odległość:

a) punktu $P = (1,-2,3)$ od płaszczyzny $\pi : x + y - 3z + 5 = 0$;

b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x + y - 2z = 0$, $\pi_2 : 2x + y - 2z - 3 = 0$;

c) płaszczyzn $\pi_1 : x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_2 : 3x - 6y + 6z - 3 = 0$;

d) punktu $P = (0,1,-1)$ od prostej $l : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{3}$;

e) prostych równoległych $l_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$, $l_2 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-3}{2}$;

f) prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x = 1, \\ z = 1; \end{cases}$

g) prostych $l_1 : \dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{1}$, $l_2 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z-2}{2}$;

h) prostej $l : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 2 - t, \end{cases}$ gdzie $t \in \boldsymbol{R}$, od płaszczyzny $\pi : 2x + y + 4z = 0$.

○ Zadanie 5.18 [13.2]

Obliczyć miarę kąta między:

a) prostą $l : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+2}{-3}$ i płaszczyzną $\pi : x - z = 0$;

b) płaszczyznami $\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0$, $\pi_2 : 2x + y - z + 3 = 0$;

c) prostymi $l_1 : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \boldsymbol{R}$, $l_2 : \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 4 - t, \\ z = 1 + 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.

○ Zadanie 5.19 [13.3]

Znaleźć rzut prostokątny:

a) punktu $P = (-3,2,0)$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z = 0$;

b) punktu $P = (-1,2,0)$ na prostą $l : x = y = z$;

c) prostej $l : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{0}$ na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 2z - 6 = 0$.

○ Zadanie 5.20 [13.4]

Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (2,3,-1)$ względem:

a) punktu $S = (1,-1,2)$;

b) prostej $l : \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0; \end{cases}$

c) płaszczyzny $\pi : 2x - y + z - 6 = 0$.

○ Zadanie 5.21 [13.5]

Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{\boldsymbol{v}} = (2,3,-1)$:

a) punktu $O = (0,0,0)$ na płaszczyznę $\pi : x - 2z + 8 = 0$;

b) prostej $l : x - 1 = y + 1 = z - 2$ na płaszczyznę $\pi : x - y + z - 1 = 0$.

○ Zadanie 5.22 [13.6]

Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych podanymi płaszczyznami:

a) $x = 1$, $y = -1$, $z = 3$, $x + y + z = 5$;

b) $x - y = 1$, $x - y = 5$, $x + 2z = 0$, $x + 2z = 3$, $z = -1$, $z = 4$.

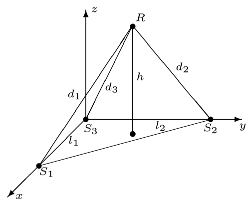
○ Zadanie 5.23 [13.7]

Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez parami przecinające się proste:

$$l_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 0, \\ z = 4t, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 3 + 3s, \\ z = -4s, \end{cases} \quad l_3 : \begin{cases} x = -2p, \\ y = 3 - 3p, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{gdzie } t, s, p \in \boldsymbol{R}.$$

○ Zadanie 5.24 [14.1]

Trzy stacje radiolokacyjne S_1, S_2, S_3 umieszczone są w wierzchołkach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $l_1 = 300\,\text{km}$, $l_2 = 400\,\text{km}$ (rysunek). Pomiary odległości rakiety R od tych stacji dały następujące wyniki $d_1 = 300\,\text{km}$, $d_2 = 400\,\text{km}$, $d_3 = 400\,\text{km}$. Obliczyć, na jakiej wysokości h leciała rakieta.



○ Zadanie 5.25 [14.2]

Cząsteczka porusza się po linii prostej ze stałą prędkością. W chwili $t_1 = 2$ cząsteczka znajdowała się w punkcie $P_1 = (0, -2, 5)$, a w chwili $t_2 = 3$ w punkcie $P_2 = (2, 3, 3)$. Znaleźć położenie P_0 tej cząsteczki w chwili $t_0 = 0$.

○ Zadanie 5.26 [14.3]

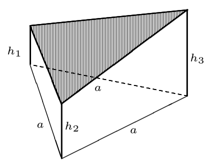
Na pochyłym płaskim terenie wytyczono kwadrat $A_1A_2A_3A_4$. Wzniesienia nad poziom morza punktów A_1, A_2, A_3 wynoszą odpowiednio $h_1 = 100\,\mathrm{m}$, $h_2 = 110\,\mathrm{m}$, $h_3 = 160\,\mathrm{m}$. Obliczyć wzniesienie h_4 punktu A_4 nad poziom morza.

○ Zadanie 5.27 [14.5]

W celu określenia kąta nachylenia płaskiego nasypu do poziomu, wykonano pomiary kąta nachylenia tego nasypu w kierunku wschodnim i południowym. Pomiary te dały następujące wyniki: w kierunku wschodnim nasyp wznosi się pod kątem $\alpha = 30°$, a w kierunku południowym opada pod kątem $\beta = 45°$. Obliczyć kąt nachylenia tego nasypu do poziomu.

○ Zadanie 5.28 [14.6]

Siatka maskująca tajny obiekt wojskowy zaczepiona jest na trzech masztach (rysunek). Maszty te mają wysokości $h_1 = 5\,\mathrm{m}$, $h_2 = 7\,\mathrm{m}$, $h_3 = 10\,\mathrm{m}$ i ustawione są w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku $a = 20\,\mathrm{m}$. Obliczyć pole siatki maskującej.

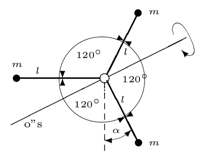


○ Zadanie 5.29 [14.8]

Nad Wrocławiem przebiegają dwa prostoliniowe korytarze powietrzne dla samolotów. Pierwszy z nich przebiega poziomo na wysokości $h_1 = 1000\,\mathrm{m}$ ze wschodu na zachód. Natomiast drugi przebiega z południowego-wschodu na północny-zachód i wznosi się pod kątem $\alpha = 10°$ Samoloty poruszające się tym korytarzem przelatują nad Wrocławiem na wysokości $h_2 = 3000\,\mathrm{m}$. Obliczyć najmniejszą możliwą odległość między samolotami lecącymi tymi korytarzami.

○ Zadanie 5.30 [14.4]

Trzy punkty materialne o masie m przymocowane są do nieważkich ramion o długości l, które tworzą między sobą kąty 120° (rysunek). Układ ten osadzony jest na poziomej osi i może obracać się wokół niej. Uzasadnić, że układ ten pozostaje w równowadze, niezależnie od położenia początkowego.



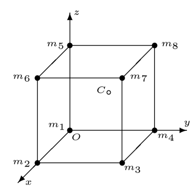
○ Zadanie 5.31 [14.7]

W wierzchołkach sześcianu o krawędzi $a = 10$ umieszczone są punkty materialne o masach odpowiednio: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$, $m_5 = 5$, $m_6 = 6$, $m_7 = 7$, $m_8 = 8$ (rysunek).

a) Określić położenie środka masy tego układu;

b) Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem osi Oz;

c) Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem osi łączącej masy m_3 i m_7;



d) Obliczyć siłę przyciągania grawitacyjnego masy m_8 przez układ pozostałych siedmiu mas.