MAP 1148 – ANALIZA MATEMATYCZNA 1.2

Listy zadań na semestr zimowy 2009/10

Lista 1

1.1. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n^2} = 0$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = 2$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n}{n+4} = -1$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n+5} = 0$; **e*)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left\lfloor \dfrac{3n+1}{n+1} \right\rfloor = 2$; **f*)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000}{n!} = 0$.

1.2. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^2+1\right)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^{20}+2\right)^3}{\left(n^3+1\right)^{20}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8^{n+1}+3}}{2^n+1}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[4]{n^4+16}-n\right)$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}\right)$.

1.3. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n2^n+1}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor n\pi \rfloor}{n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \sin n}{3^n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n+2}$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+2^n}{5^n+4^n}}$.

1.4. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{3n+2}{5n+2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{5n+3}{3n+1}\right)^n\right]$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

1.5. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej ciągu uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2(n+3) = \infty$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^4-1\right) = \infty$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}-n\right) = -\infty$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(10-\sqrt[3]{n}\right) = -\infty$.

1.6. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach znaleźć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n+5}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3^n \cos n - 4^n\right)$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin n - 2)\, n^2$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n}\right)^n \left(5-\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^5-10n^6+1\right)$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\lfloor\sqrt{1}\rfloor}+\dfrac{1}{\lfloor\sqrt{2}\rfloor}+\ldots+\dfrac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right)$.

Lista 2

2.1. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4-3n^3-2n^2-1\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(n+1)!}{n!+2}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]}$.

2.2. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+1}{3^x+2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\operatorname{tg}^2x+1}{\operatorname{tg}^2x+5}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{1-x^2}$.

2.3. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{sgn}x$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x^3}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\lfloor 3\sin x\rfloor$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|^3}{x^3-x^2}$; **f)** $\lim\limits_{x\to -1}\operatorname{sgn}\left[x\left(1-x^2\right)\right]$.

2.4. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lfloor x\sqrt{8}\rfloor}{\lfloor x\sqrt{2}\rfloor}=2$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x}=1$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x^2}=0$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\sin x}{x^2}=0$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x+\sin^2x}=0$.

2.5. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych funkcji obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+2x^2+x-100\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^4-3x^3+2x^2-x+1\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}\right)$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$.

2.6. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+2^x\right)}{3^x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^x-1}{4^{\sqrt{x}}-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\operatorname{tg}(2x)\right]^{\operatorname{ctg}x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{3}}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x}$; **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{2x-1}$.

Lista 3

3.1. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji:

a) $u(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$; **b)** $v(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$; **c)** $w(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}$;

d) $z(x)=\dfrac{\cos(\pi x)}{2^x-8}$; **e)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; **f)** $g(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$;

3.2. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } |x| \geqslant \dfrac{\pi}{2}, \quad x_1 = -\dfrac{\pi}{2}, \\ ax + b & \text{dla } |x| < \dfrac{\pi}{2}, \quad x_2 = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

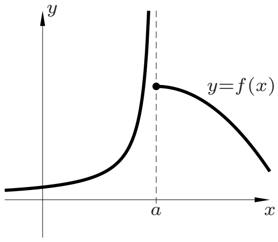
b) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{dla } |x| < 2, \quad x_1 = -2, \\ x\sqrt{x^2-4} & \text{dla } |x| \geqslant 2, \quad x_2 = 2; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} a\sin x + b\cos x & \text{dla } |x| > \dfrac{\pi}{4}, \quad x_1 = -\dfrac{\pi}{4}, \\ 1 + \operatorname{tg} x & \text{dla } |x| \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \quad x_2 = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

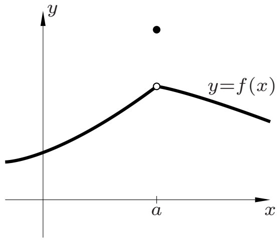
d) $f(x) = \begin{cases} bx & \text{dla } x < \pi, \\ \dfrac{\sin x}{ax} & \text{dla } x \geqslant \pi, \quad x_0 = \pi. \end{cases}$

3.3. Określić rodzaje nieciągłości funkcji w punkcie a (jeżeli istnieją) dla funkcji o podanych wykresach:

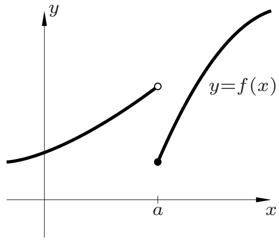
a)



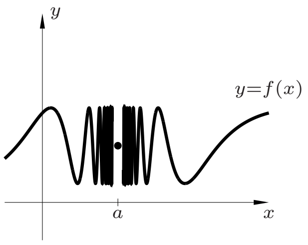
b)



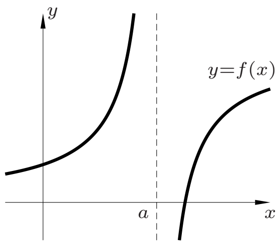
c)



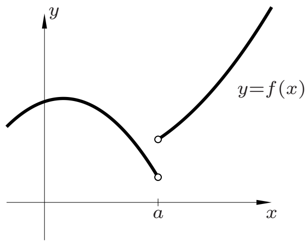
d)



e)



f)



3.4. Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x \in (0,1) \cup (1,\infty), \\ 3 & \text{dla } x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \quad x_0 = 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \operatorname{sgn}\Big[x(x-1)\Big], \ x_0 = 1;$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \quad x_0 = 0. \end{cases}$

3.5. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów uzasadnić, że podane zagadnienia ekstremalne mają rozwiązania:

a) wśród stożków wpisanych w kulę o promieniu r istnieje ten, który ma największą objętość;

b) wśród trójkątów prostokątnych wpisanych w koło o promieniu r istnieje ten, który ma największy obwód;

c) wśród prostokątów opisanych na danej elipsie istnieje ten, który ma najmniejsze i największe pole.

3.6. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $x^3 + 6x - 2 = 0, \ (0,1);$ **b)** $x\sin x = 7, \ \left(2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right);$ **c)** $1 = \dfrac{\sin x}{2} + x, \ \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$

d) $x^{100} + x - 1 = 0, \ \left(\dfrac{1}{2}, 1\right);$ **e)** $3^x + x = 3, \ (0,1);$ **f)** $x2^x = 1, \ (0,1).$

Wyznaczyć rozwiązania równań **a)**, **d)** i **f)** z dokładnością 0.125.

Lista 4

4.1. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x-1|$, $x_0 = 1$; **b)** $f(x) = 2x - |x|$, $x_0 = 0$; **c)** $f(x) = |x-\pi|^3 \sin x$, $x_0 = \pi$;

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 2, \\ 2^x & \text{dla } x > 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$; **e)** $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{dla } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$; **f)** $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

Naszkicować wykresy funkcji **a)**, **b)**, **d)** i **e)**.

4.2. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 3x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$; **b)** $f(x) = \frac{1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x > 0$; **d)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

4.3. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \left|x^2 - x\right|$, $x_0 = 1$; **b)** $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{sgn}(x)$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ $x_0 = 0$; **d)** $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)}{2} & \text{dla } x < 1, \\ \sqrt{x} - 1 & \text{dla } x \geqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

Naszkicować wykresy tych funkcji.

4.4. Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe w punkcie $x_0 = 0$:

a) $f(x) = 3 - \sqrt[5]{x}$; **b)** $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}$; **c)** $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$; **d)** $f(x) = \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}$.

4.5. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne funkcji:

a) $y = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) e^x$; **b)** $y = \left(1 + \sqrt[4]{x}\right) \operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)$; **c)** $y = e^x \operatorname{arc\,tg} x$;

d) $y = \ln\left(\sin^2 x + 1\right)$; **e)** $y = \sqrt[3]{\arcsin\left(x^2\right)}$; **f)** $y = e^{e^x}$;

g) $y = \frac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}$; **h)** $y = x^{\operatorname{tg} x}$; **i)** $y = \sqrt[x]{x}$.

4.6.* Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $f^{-1}(y_0)$, jeżeli:

a) $f(x) = x + \ln x$, $y_0 = e + 1$; **b)** $f(x) = \cos x - 3x$, $y_0 = 1$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}$, $y_0 = 3$; **d)** $f(x) = x^3 + 3^x$, $y_0 = 4$.

4.7. Obliczyć f', f'', f''' funkcji:

a) $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$; **b)** $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$; **c)** $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

d) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; **e)** $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; **f)** $f(x) = x^3 \ln x$.

4.8. Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x)=\arcsin\frac{x}{2},\ (1,f(1))$; **b)** $f(x)=\ln\left(x^2+e\right),\ (0,f(0))$; **c)** $f(x)=e^{\operatorname{tg}x},\ \left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

d) $f(x)=\sqrt{2^x+1},\ (3,f(3))$; **e)** $f(x)=\frac{2x}{1+x^2},\ \left(\sqrt{2},f\left(\sqrt{2}\right)\right)$; **f)** $f(x)=\sqrt[x]{x},\ (e,f(e))$.

Lista 5

5.1. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

a) $\sqrt[3]{7.999}$; **b)** $\frac{1}{\sqrt{3.98}}$; **c)** $\ln\frac{2001}{2000}$;

d) $\ln 0.9993$; **e)** $e^{0.04}$; **f)** $\arccos 0.499$.

5.2. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:

a) $|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|\leqslant|x-y|$ dla $a,b\in\mathbb{R}$; **b)** $\ln\frac{y}{x}<y-x$ dla $1\leqslant a<b$;

c) $x\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0\leqslant x<1$; **d)** $e^x>ex$ dla $x>1$.

5.3. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f, punktów x_0 oraz n :

a) $f(x)=x^3$, $x_0=-1$, $n=4$; **b)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=1$, $n=2$; **c)** $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\pi$, $n=3$;

d) $f(x)=e^{-x}$, $x_0=0$, $n=5$; **e)** $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=2$, $n=3$; **f)** $f(x)=\ln x$, $x_0=e$, $n=4$.

5.4. Napisać wzory Maclaurina z n-tą resztą Lagrange'a dla funkcji:

a) $f(x)=\sin\frac{x}{3}$; **b)** $f(x)=\operatorname{ch}x$;

c) $f(x)=\cos x$; **d)** $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5.5. Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

a) $\operatorname{tg}x\approx x,\ |x|\leqslant\frac{\pi}{12}$; **b)** $\cos^2 x\approx 1-x^2,\ |x|\leqslant 0.1$;

c) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8},\ |x|\leqslant 0.25$; **d)** $\ln(1-x)\approx -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3},\ |x|<0.1$.

5.6. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

a) $\frac{1}{e}$ z dokładnością 10^{-3}; **b)** $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3};

c) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4}; **d)** $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5}.

Lista 6

6.1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

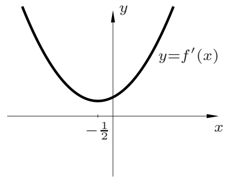
a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(2^x+1\right)}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\sin\frac{\pi}{2}x}{\ln x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2}$;

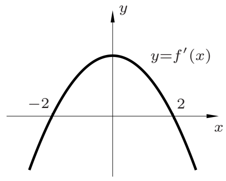
d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{arcctg}x$;

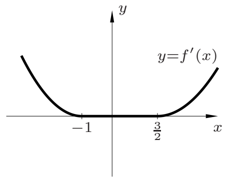
g) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$; **h)** $\lim\limits_{x\to\pi^-}(\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$;

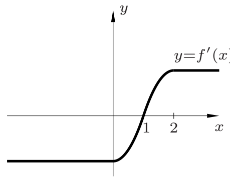
j) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$; **l)** $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$.

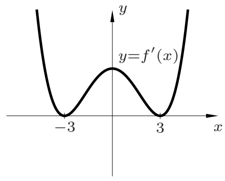
6.2. Na rysunkach przedstawiono wykresy pochodnych pewnych funkcji. Podać przedziały, na których funkcje te są rosnące:

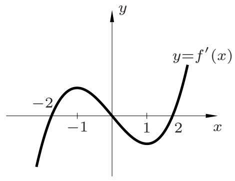
a)


b)


c)


d)


e)


f)


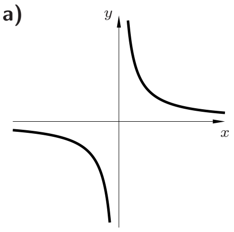
6.3. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji:

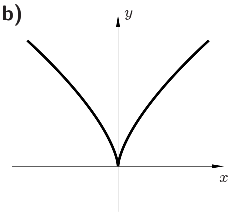
a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2$; **c)** $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$;

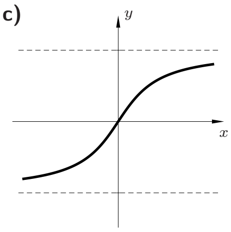
d) $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; **e)** $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$; **f)** $f(x) = xe^{-3x}$;

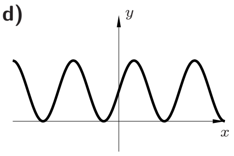
g) $f(x) = x \ln^2 x$; **h)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; **i)** $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.

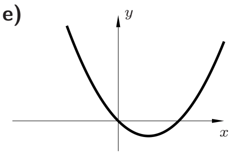
6.4. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji **a)** – **f)** i ich pochodnych **A)** – **F)**. Połączyć wykresy funkcji z wykresami ich pochodnych:

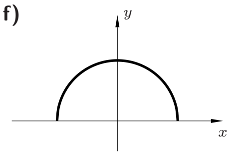
a)


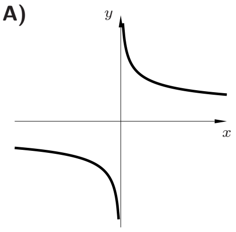
b)


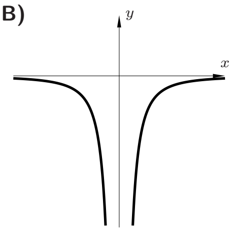
c)


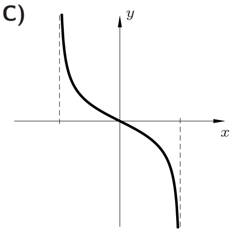
d)


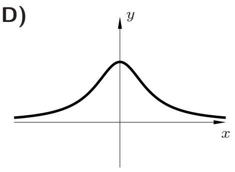
e)


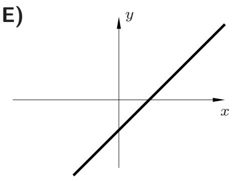
f)


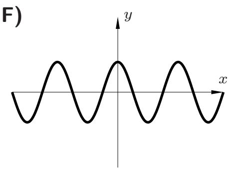
A)


B)


C)


D)


E)


F)


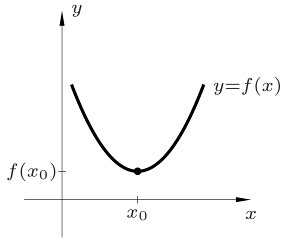
6.5. Uzasadnić tożsamości:

a) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \dfrac{\pi}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$; **b)** $\arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x$ dla $x \in (-1, 1)$;

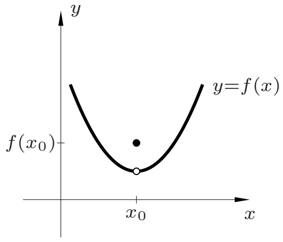
c) $\operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1-x}{1+x}$ dla $x \in (-1, \infty)$; **d)** $\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$.

6.6. Określić rodzaj ekstremum (jeżeli istnieje) w punkcie x_0 funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunkach:

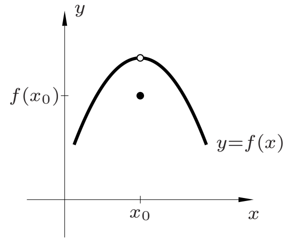
a)



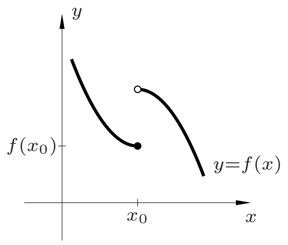
b)



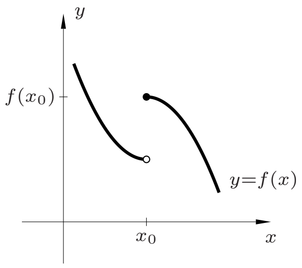
c)



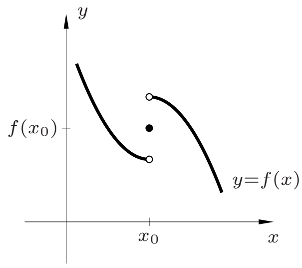
d)



e)



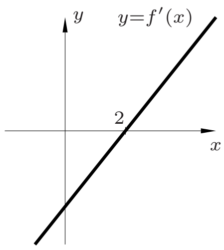
f)



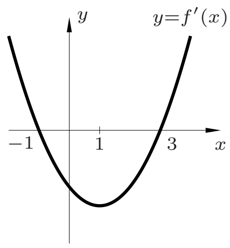
Lista 7

7.1. Na rysunkach przedstawiono wykresy pochodnych pewnych funkcji **ciągłych**. Wskazać punkty, w których funkcje te mają ekstrema lokalne:

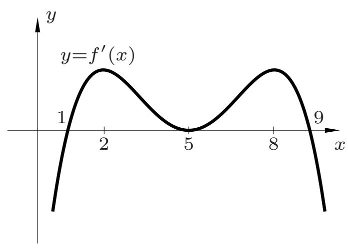
a)



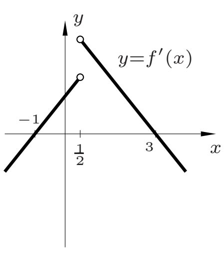
b)



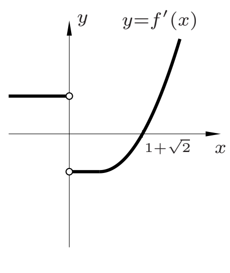
c)



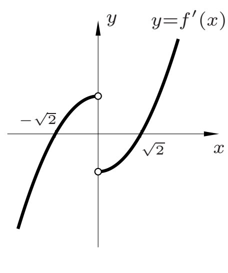
d)



e)



f)



7.2. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

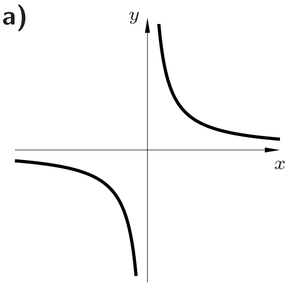
a) $f(x) = x^3 - 4x^2$; **b)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; **c)** $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^4}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$; **e)** $f(x) = x - \sqrt{x}$; **f)** $f(x) = \left|x^2 - 5x - 6\right|$;

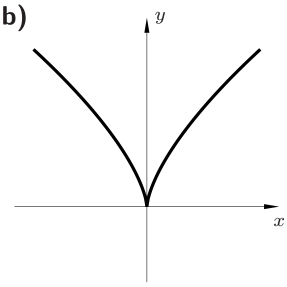
g) $f(x) = x \ln x$; **h)** $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$; **i)** $f(x) = 2 \operatorname{arc\,tg} x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

7.3. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji **a)** – **f)** i ich drugich pochodnych **A)** – **F)**. Połączyć wykresy funkcji z wykresami ich drugich pochodnych:

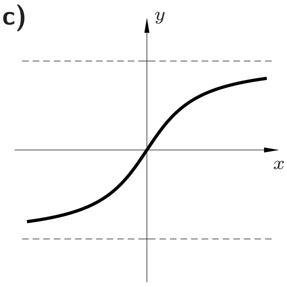
a)



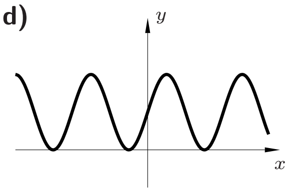
b)



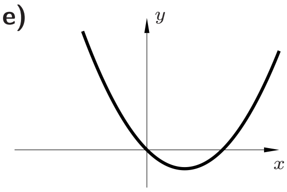
c)



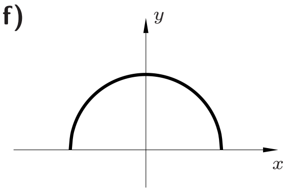
d)



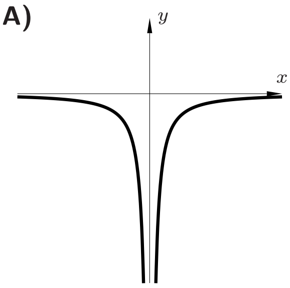
e)



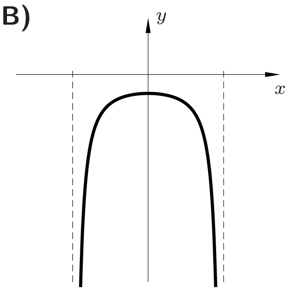
f)



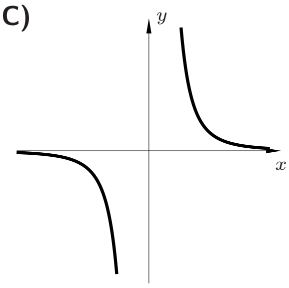
A)



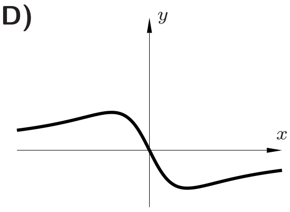
B)



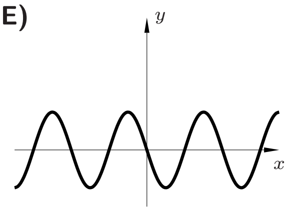
C)



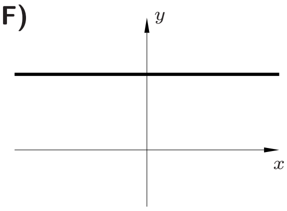
D)



E)



F)



7.4. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

a) $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$; **b)** $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 - 4\ln|x|$; **c)** $f(x) = \sin x + \frac{1}{8}\sin 2x$;

d) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; **e)** $f(x) = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; **f)** $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

7.5. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; **b)** $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$; **c)** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$;

d) $f(x) = 3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$; **e)** $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; **f)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Lista 8

8.1. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} - 2x\sqrt{x}\right) dx$; **b)** $\int \frac{(1-x)\,dx}{1-\sqrt[3]{x}}$; **c)** $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$;

d) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos x - \sin x}$; **e)** $\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$; **f)** $\int \frac{2^x - 5^x}{10^x}\,dx$.

8.2. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int xe^{-3x}\,dx$; **b)** $\int x^2 2^x\,dx$; **c)** $\int \sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$;

d) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; **e)** $\int x^2\sin x\,dx$; **f)** $\int \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{x+1}}$;

g) $\int \ln(x+1)\,dx$; **h)** $\int \arccos x\,dx$; **i)** $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

8.3. Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; **b)** $\int \frac{\sqrt{1+4x}}{x}\,dx$; **c)** $\int (x+1)\sin\left(x^2+2x+2\right)\,dx$;

d) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}}$; **e)** $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$; **f)** $\int (5-3x)^{10}\,dx$;

g) $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx$; **h)** $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; **i)** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

j) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; **k)** $\int \frac{5\sin x\,dx}{3-2\cos x}$; **l)** $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

8.4.* Obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int (|x|+1)\,dx$; **b)** $\int \min\left\{x, x^2\right\}\,dx$; **c)** $\int \left|1-x^2\right|\,dx$; **d)** $\int e^{|x|}\,dx$.

Lista 9

9.1. Obliczyć podane całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{(x-3)^7}$; **b)** $\int \frac{dx}{x+5}$; **c)** $\int \frac{5\,dx}{(2-7x)^3}$; **d)** $\int \frac{8\,dx}{9x+20}$.

9.2. Obliczyć podane całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; **b)** $\int \frac{(6x+3)\,dx}{x^2+x+4}$; **c)** $\int \frac{(4x+2)\,dx}{x^2-10x+29}$;

d) $\int \frac{(x-1)\,dx}{9x^2+6x+2}$; **e*)** $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$; **f*)** $\int \frac{5\,dx}{\left(x^2+2\right)^3}$.

9.3. Obliczyć podane całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)}$; **b)** $\int \frac{x^2\,dx}{x+1}$; **c)** $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$; **d)** $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$;

e) $\int \frac{(4x+1)\,dx}{2x^2+x+1}$; **f)** $\int \frac{(3x-1)\,dx}{x^2-x+1}$; **g)** $\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$; **h)** $\int \frac{2\,dx}{x^2+6x+18}$;

i) $\int \frac{(5-4x)\,dx}{x^2-4x+20}$; **j)** $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5}$; **k)** $\int \frac{x(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$; **l)** $\int \frac{dx}{x\left(x^2+4\right)}$.

9.4. Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \sin^3 x\,dx$; **b)** $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$; **c)** $\int \cos^4 x\,dx$;

d) $\int \sin^3 x\cos^6 x\,dx$; **e)** $\int \cos^2 x\cos 2x\,dx$; **f*)** $\int \sin^2 2x\sin^2 x\,dx$.

9.5. Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$; **b)** $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$;

d) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos x}$; **e)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x}$; **f)** $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^3 x}$;

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$; **h)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; **i)** $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$.

9.6. Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \sin 3x \cos x\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \cos x \cos 5x\,dx$; **d*)** $\displaystyle\int \cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx$.

Lista 10

10.1. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\left(1+x^3\right)\,dx$; **b)** $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$; **c)** $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\,dx$;

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-1}{x+1}\,dx$; **e)** $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{dx}{x^2+9}$; **f)** $\displaystyle\int_{-\frac12}^{\frac12} \frac{dx}{x^2-1}$;

g) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x + \cos^2 x)\,dx$; **h)** $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \cos x\,dx$; **i)** $\displaystyle\int_{1}^{e} x \ln x\,dx$.

10.2. Obliczyć podane całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x e^{\cos x}\,dx,\ \cos x = t$; **b)** $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}},\ 1+x=t$; **c)** $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x}\,dx,\ \sqrt{1+x}=t$;

d) $\displaystyle\int_{1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}},\ 3x-2=t^2$; **e)** $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x\,dx,\ \ln x = t$; **f)** $\displaystyle\int_{0}^{\frac14} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)},\ x=t^2$;

g) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx,\ x=3\sin t$; **g)** $\displaystyle\int_{0}^{\frac12\ln 3} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}},\ e^x=t$; **i)** $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\sqrt[3]{x-x^3}\,dx}{x^4},\ x=\frac{1}{t}$.

10.3. Metodą całkowania przez części obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{2x}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2e^{2x}\,dx$; **c)** $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$; **e)** $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(1+\cos x)\,dx$; **f)** $\displaystyle\int_{0}^{1} \arcsin x\,dx$.

10.4. Obliczyć całki oznaczone:

a) $\displaystyle\int_{\frac1e}^{2} (x-1)\operatorname{sgn}(\ln x)\,dx$; **b)** $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx$, gdzie $f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1 & \text{dla } 1<x\leqslant 2,\\ (2-x)^2 & \text{dla } 2<x\leqslant 3;\end{cases}$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \big||x|-1\big|\,dx$; **d)** $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{|x-1|\,dx}{|x-2|+|x-3|}$;

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \operatorname{sgn}\left(x - x^2\right)\, dx$; **f)** $\displaystyle\int_{1}^{3} x \lfloor x \rfloor\, dx$.

Lista 11

11.1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}$; **b)** $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} x \sin x\, dx$; **c)** $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}$;

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4}$; **e)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$; **f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$.

11.2. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x+x^2}}$; **b)** $\displaystyle\int_{5}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^5-3}}$; **c)** $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{x}\, dx$;

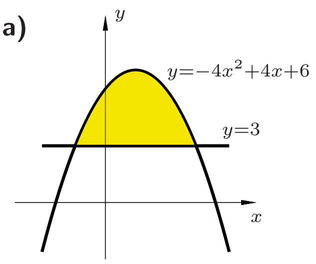
d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x-1}{x^3+x+1}$; **e)** $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^3-\sin x}$; **f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\left(e^{2x}+1\right)\, dx}{e^x-1}$.

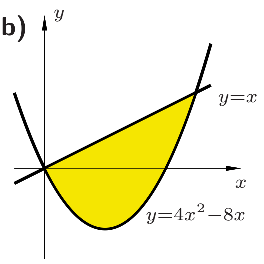
11.3. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

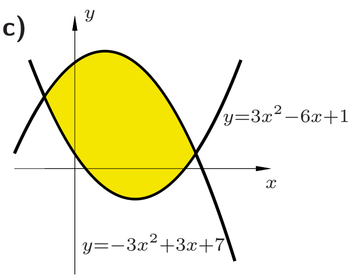
a) $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$; **b)** $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{(x-1)\, dx}{x^4+x+1}$; **c)** $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{(1+\sin x)\, dx}{x^3}$;

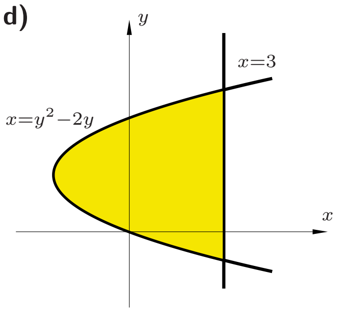
d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x^7+1}}$; **e)** $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}+\cos x\right)\, dx}{\sqrt{x}-1}$; **f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2^x\, dx}{x-1}$.

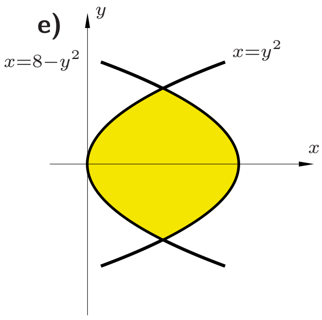
11.4. Obliczyć pola trapezów krzywoliniowych:

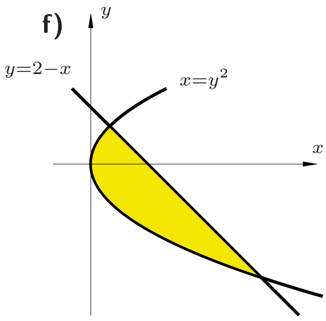
a)


b)


c)


d)


e)


f)


Lista 12

12.1. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

a) $y = 2x - x^2,\ x + y = 0;$ **b)** $y = x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 3x;$ **c)** $y = \frac{1}{x^2},\ y = x,\ y = 4;$

d) $4y = x^2,\ y = \frac{8}{x^2+4};$ **e)** $y = x + \sin x,\ y = x,\ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi);$ **f)** $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0;$

g) $y = \pi x^2,\ x = \pi y^2;$ **h)** $yx^4 = 1,\ y = 1,\ y = 16;$ **i)** $y^2 = -x,\ y = x - 6,\ y = -1,\ y = 4.$

12.2. Obliczyć długości krzywych:

a) $y = 2\sqrt{x^3}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 11;$ **b)** $y = \operatorname{ch} x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1;$

c) $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$, gdzie $2 \leqslant x \leqslant 3;$ **d)** $y = 1 - \ln \cos x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}.$

12.3. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu figur T wokół wskazanych osi:

a) $T\colon 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2,\ Ox;$ **b)** $T\colon 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{5},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{2}{\sqrt{x^2+4}},\ Oy;$

c) $T\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x},\ Oy;$ **d)** $T\colon 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x},\ Oy;$

e) $T\colon 1 \leqslant x \leqslant 4,\ \frac{4}{x} \leqslant y \leqslant 5 - x,\ Ox;$ **f)** $T\colon 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x + \cos x,\ Ox.$

12.4. Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów podanych funkcji wokół wskazanych osi:

a) $f(x) = \frac{x-1}{9},\ 1 \leqslant x \leqslant 10,\ Oy;$ **b)** $f(x) = \sqrt{4+x},\ -4 \leqslant x \leqslant 2,\ Ox;$

c) $f(x) = \sqrt{4-x^2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ Ox;$ **d)** $f(x) = |x-1| + 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ Oy;$

e) $f(x) = \frac{x^2}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3},\ Oy;$ **f)** $f(x) = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ Ox.$

12.5. **a)** Przy rozciąganiu sprężyny siła jest wprost proporcjonalna do wydłużenia sprężyny (współczynnik proporcjonalności wynosi k). Obliczyć pracę jaką należy wykonać, aby sprężynę o długości l rozciągnąć do długości L.

b) Zbiornik ma kształt walca o osi poziomej. Średnica walca $D = 2\,\mathrm{m}$, a długość $L = 6\,\mathrm{m}$. Obliczyć pracę, jaką potrzeba wykonać, aby opróżnić zapełniony całkowicie wodą zbiornik. Otwór do opróżnienia zbiornika znajduje się w jego górnej części. Masa właściwa wody $\gamma = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lista 13

13.1. Sprawdzić, że dla każdego $C \in \mathbb{R}$ podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych, a następnie znaleźć rozwiązania spełniające zadane warunki początkowe:

a) $y(t) = t + C,\ y' = 1,\ y(0) = 0;$ **b)** $y(t) = Ce^t,\ y' = y,\ y(1) = -1;$

c) $y(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^t,\ y' + 2y = e^t,\ y(0) = 1;$ **d)** $y(t) = t + C\sqrt{t^2+1},\ y' = \frac{ty+1}{t^2+1},\ y(0) = 0.$

13.2. Scałkować podane równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

a) $yy' + 4t = 0;$ **b)** $dy = 2ty^2 dt;$ **c)** $t\left(y^2 - 1\right) dt + y\left(t^2 - 1\right) dy = 0;$

d) $2\sqrt{t}y' = \sqrt{1-y^2};$ **e)** $y' = 1 + t + y + ty;$ **f)** $y' + 4y = y\left(e^{-t} + 4\right).$

13.3. Dokonać analizy rozwiązań równania różniczkowego $y't = ky$ w zależności od rzeczywistego parametru k. Naszkicować krzywe całkowe tego równania.

13.4. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:

a) $y' \sin t = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e;$ **b)** $t\sqrt{1-y^2}dt + y\sqrt{1-t^2}dy = 0, \quad y(0) = 1;$

c) $t(y+1)y' = y, \quad y(e) = 1;$ **d)** $y \cos t dt - \left(1+y^2\right) dy = 0, \quad y(0) = 1;$

e) $y' = y^2\left(1+t^2\right), \quad y(0) = -2;$ **f)** $e^y\left(y'-1\right) = 1, \quad y(0) = 0.$

13.5. Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

a) $y' + y = \sin t;$ **b)** $y' + 2ty = e^{-t^2};$ **c)** $ty' - 2y = t^3 \cos t;$

d) $ty' - 2y = 4t^4;$ **e)** $ty + e^t - ty' = 0;$ **f)** $(2t+1)y' = 4t + 2y.$

13.6. Wyznaczyć rozwiązania podanych zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych oraz podać przedziały, na których są one określone:

a) $y' - y = 1, \ y(3) = 3;$ **b)** $y' = (y+1)\sin t, \ y\left(t_0\right) = y_0;$

c) $ty' + y = t + 1, \ y(1) = 0;$ **d)** $y' \sin t \cos t = y + \sin^3 t, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Lista 14

14.1. Dany jest układ fundamentalny $(y_1(t), y_2(t))$ równania liniowego jednorodnego postaci $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Dla jakich parametrów α, $\beta \in \mathbb{R}$, para funkcji $(u_1(t), u_2(t))$ określonych wzorami

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \alpha y_1(t) + y_2(t) \\ u_2(t) &= y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$

jest również układem fundamentalnym tego równania?

14.2. Sprawdzić, że podane funkcje tworzą na zadanych przedziałach układy fundamentalne wskazanych równań różniczkowych. Znaleźć rozwiązania tych równań z zadanymi warunkami początkowymi:

a) $y_1(t) = e^{-t}, \ y_2(t) = e^{2t}, \ (-\infty, \infty), \ y'' - y' - 2y = 0, \ y(0) = -1, \ y'(0) = -5;$

b) $y_1(t) = \ln t, \ y_2(t) = t, \ (0, e), \ t^2(1 - \ln t)y'' + ty' - y = 0, \ y(1) = 2, \ y'(1) = 1;$

c) $y_1(t) = t, \ y_2(t) = e^t, \ (-\infty, 1), \ (t-1)y'' - ty' + y = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$

d) $y_1(t) = t, \ y_2(t) = t^2, \ (0, \infty), \ t^2 y'' - 2ty' + 2y = 0, \ y(1) = 3, \ y'(1) = 1.$

14.3. Wyznaczyć równania różniczkowe liniowe jednorodne postaci $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, których układy fundamentalne składają się z podanych funkcji:

a) $y_1(t) = \operatorname{sh} t, \ y_2 = \operatorname{ch} t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$; **b)** $y_1(t) = t, \ y_2(t) = t^2$, gdzie $t \in (0, \infty)$.

14.4. Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach:

a) $6y'' - 5y' + y = 0;$ **b)** $y'' - y' - 2y = 0;$ **c)** $4y'' - 4y' + y = 0;$

d) $y'' + y' + \frac{y}{4} = 0;$ **e)** $y'' - 4y' + 5y = 0;$ **f)** $y'' - 2y' + 5y = 0;$

g) $y'' + 6y' + 18y = 0;$ **h)** $7y'' + 4y' - 3y = 0;$ **i)** $y'' - 6y' + 9y = 0.$

14.5. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $y'' + y' - 6y = 0, \ y(0) = 1, y'(0) = 0;$ **b)** $y'' + 9y = 0, \ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1;$

c) $y'' - 2y' + y = 0, \ y(1) = 2, y'(1) = 3;$ **d)** $y'' - 7y' + 12y = 0, \ y(0) = 3, y'(0) = -2;$

e) $y'' - 7y' + 10y = 0, \ y(0) = 1, y'(0) = 5.$

Lista 15

15.1. Wyznaczyć rozwiązania ogólne podanych równań liniowych niejednorodnych, jeżeli znane są układy fundamentalne odpowiadający im równań jednorodnych:

a) $y'' - 7y' + 10y = e^{3t}$, $y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = e^{5t}$;

b) $\left(3t + 2t^2\right) y'' - 6\,(1 + t)\, y' + 6y = 6$, $y_1(t) = t^3$, $y_2(t) = t + 1$;

c) $(t - 1)\, y'' - ty' + y = (t - 1)^2 e^t$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = e^t$;

d) $(t + 1)\, y'' - (2 + t)y' = e^t$, $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = te^t$.

15.2. Korzystając z metody uzmienniania stałych rozwiązać podane równania różniczkowe:

a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$; **b)** $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2t}$; **c)** $y'' - y = \dfrac{4t^2 + 1}{t\sqrt{t}}$;

d) $y'' - 2y' \operatorname{tg} t = 1$; **e)** $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^t}$; **f)** $y'' + 3y' + 2y = \cos\left(e^t\right)$.

15.3. Korzystając z metody współczynników nieoznaczonych (metoda przewidywania) rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

a) $y'' + 2y' + y = -2$;

b) $y'' - 4y' + 4y = t^2$;

c) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2t}$;

d) $y'' + 3y' = 3te^{-3t}$;

e) $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - t)e^{-2t}$;

f) $y'' + 4y' - 4y = 8 \sin 2t$;

g) $y'' + 9y = 3 \sin 3t + 2 \cos 3t$;

h) $y'' + \alpha^2 y = \cos \alpha t$, gdzie $\alpha \neq 0$.

15.4.* Korzystając z twierdzenia o składaniu rozwiązań i metody współczynników nieoznaczonych (metoda przewidywania) rozwiązać podane równania różniczkowe:

a) $y'' - y' - 2y = e^t + e^{-2t}$; **b)** $y'' - y = t + \sin t$; **c)** $y'' - 4y' = 2\cos^2 4t$; **d)** $y'' - y' - 2y = 4t - 2e^t$.

15.5. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $y'' + y = 2(1 - t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;

b) $y'' - 6y' + 9y = 9t^2 - 12t + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

c) $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

d) $y'' + y' = e^{-t}$, $y\,(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. Zbigniew Skoczylas