

# Matematyka

## Lista zadań 4.

Zadania oznaczone gwiazdką są nieco trudniejsze.

Zadania oznaczone dwiema gwiazdkami są znacznie trudniejsze i często wymagają skorzystania z programów do obliczeń symbolicznych lub samodzielnego zaprogramowania. Są nieobowiązkowe.

1. Korzystając z definicji Cauchy'ego uzasadnić, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(x + \pi/2) = 0.$$

2. Korzystając z definicji Heinego uzasadnić, że funkcja

$$f(x) = (x + 1) \cos(1/x)$$

nie ma granicy w punkcie  $x = 0$ .

3. Naszkicować wykresy funkcji odwrotnych do funkcji:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x, & g(x) &= x^2 - x, \\ h(x) &= \ln(x + 1), & k(x) &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

W razie potrzeby ograniczyć dziedzinę funkcji tak, aby w ograniczonej dziedzinie była wzajemnie jednoznaczna.

4. Naszkicować wykresy funkcji:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sin x, & g(x) &= x - \cos x, \\ h(x) &= 1 + \arctg x, & k(x) &= x + \arctg x. \end{aligned}$$

5. Określić dziedziny i naszkicować wykresy funkcji

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin 2x, & g(x) &= 2 \arctg x, \\ h(x) &= 3 \sinh x, & i(x) &= \cosh x/2. \end{aligned}$$

**6.** Funkcję *signum* (znak) określamy wzorem:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Niech  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(1/x))$  oraz  $g(x) = x \operatorname{sgn}(\sin(1/x))$ . Jak wyglądają ich wykresy? Czy istnieją granice tych funkcji w punkcie  $x = 0$ ?

**7.** Naszkicować wykresy poniższych funkcji i zbadać istnienie granicy i ciągłość w punkcie  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sgn}(x) \cos x, & g(x) &= \operatorname{sgn}(x) \sin x, & h(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{1+x^2}, \\ i(x) &= x \operatorname{sgn}(x) \cos x, & j(x) &= x \operatorname{sgn}(x) \sin x, & k(x) &= \frac{x \operatorname{sgn}(x)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

**8\*.** Korzystając ze wzoru

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

obliczyć analogiczne wzory (szeregi) na  $\sinh x$  i  $\cosh x$ .

**9\*\*.** Jak dobrze sumy częściowe szeregów obliczonych w zadaniu 8 przybliżają funkcje  $\sinh x$  i  $\cosh x$ . Przy pomocy programów, (np. Maxima) sporządzić odpowiednie wykresy sum częściowych i funkcji  $\sinh x$  i  $\cosh x$ .

**10\*.** Niech  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(1/x))$  oraz  $g(x) = x \operatorname{sgn}(\sin(1/x))$ . Jak wyglądają ich wykresy? Czy istnieją granice tych funkcji w punkcie  $x = 0$ ?

**11\*\*.** Korzystając ze strony *Wolfram Alpha* zrobić wykresy funkcji i znaleźć ich granice  $f(x)$  i  $g(x)$  dla  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 1$  i  $x \rightarrow \infty$ , o ile te granice istnieją.

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin(1/x) - x)x^3, \\ g(x) &= (\sin(1/x) - x)/x^3. \end{aligned}$$