

Matematyka

Lista zadań 2.

1. Zastosować kryteria d'Alemberta, Cauchy'ego i Leibniza do zbadania zbieżności szeregu geometrycznego.

2. Czy da się stwierdzić na podstawie pewnego kryterium (jakiego?), że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k} = \ln 2 \approx 0.69315 \quad (1)$$

jest zbieżny?

Obliczając sumy częściowe sprawdzić, jak szybko sumy częściowe stają się przybliżeniami sumy szeregu (1).

Można skorzystać z programu *Maxima* oraz z programu WolframAlpha dla obliczenia za pomocą jego kalkulatora sumy szeregu (1).

Warto też sprawdzić, na przykład programem *Maxima*, dokładniejszą wartość $\ln 2$.

3. Czy da się stwierdzić na podstawie pewnego kryterium (jakiego?), że szereg

$$\sqrt{12} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k (2k+1)} = \pi \quad (2)$$

jest zbieżny?

Ile trzeba obliczyć sum częściowych, aby obliczyć π ze wzoru (2) z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku?

Wskazówka. Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

w którym $a_n \rightarrow 0$, $a_n > 0$, błąd oszacowania sumy szeregu sumami częściowymi nie przekroczy $|a_n|$.

4. Narysować wykresy funkcji $f(x) = x^k$ dla kilku liczb k i funkcji do nich odwrotnych $f^{-1}(x)$, jeśli takie istnieją dla $x \in \mathbb{R}$.

5. Czy da się ograniczyć dziedzinę funkcji z zadania 4 tak, aby funkcje odwrotne istniały dla wszystkich k ?
6. Wiadomo (uzasadnienie na przyszłych wykładach), że

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x. \quad (3)$$

Jak wyglądają przybliżenia funkcji $\sin x$ dla kilku początkowych wartości k ?

Jak przybliżyć wartość $\sin(3.8)$ wzorem (3)?

Czy wystarczy podstawić $x = 3.8$?

Narysować wykres sumy trzech i czterech pierwszy wyrazów szeregu, czyli $x - x^3/6 + x^5/120$ oraz $x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040$.

Warto skorzystać z programu *Maxima*, w którym $n!$ to **factorial(n)**.

Uwaga. Używanie stopni jako argumentów funkcji trygonometrycznych jest **surowo zabronione** na zajęciach z matematyki!

Wojciech Kordecki