

Matematyka

Lista zadań 1.

Uwaga. Gwiazdką będą oznaczane zadania nieco trudniejsze.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań, warto przeczytać z książki K. Selwat, *Wybrane zagadnienia matematyki*, rozdz. 1 oraz pkt. 4.1, 4.2, 4.4.

1. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

$$\bigvee_{y \in \mathbb{R}} \bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 - xy + y > 0,$$

$$\bigvee_{y \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 - xy + y > 0,$$

$$\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 - xy + y > 0,$$

$$\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 - xy + y > 0.$$

2. Obliczyć granice ciągów:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{2n}, \quad b_n = \frac{2n + 1}{n^3 + n^2 - 1},$$

$$c_n = \frac{3n^3 + 2n^2 + 3n + 4}{4n^3 - 4}, \quad d_n = \frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 4 + \sin(\pi n)}{5n^3 - 4 + \cos(\pi n)}.$$

3. Obliczyć granice ciągów:

$$a_n = \sqrt{4n^2 + 2n} - \sqrt{4n + 2}, \quad b_n = \sqrt{4n^2 + 2n} - \sqrt{4n^2 + 2},$$

$$c_n = \sqrt{4n^2 + 2n} - \sqrt{2n^2 + 2}, \quad d_n = \sqrt{4n^2 + 2n} - \sqrt{4n^2 - 2n}.$$

Wskazówka. Wyrażenia pomnożyć i podzielić przez sumę pierwiastków.

4. Podać przykłady takich ciągów $x_n \rightarrow \pm\infty$ i $y_n \rightarrow \pm\infty$ lub $x_n \rightarrow 0$ i $y_n \rightarrow 0$, że

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty, & \text{b)} \frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty, & \text{c)} \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0, \\ \text{d)} \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, & \text{e)} \frac{x_n}{y_n} \rightarrow -1, & \text{f)} \frac{x_n}{y_n} \text{ – rozbieżny.} \end{array}$$

5. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granice:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}, & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + n \cos n}{n^2 + 1}, \\ \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \ln n}{n}, & \text{d*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{3n^2 + 1}. \end{array}$$

6. Niech

$$a_n = \begin{cases} 3/2 & \text{dla } n = 1, \\ \frac{a_{n-1}^2}{3} + \frac{2}{3} & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Czy ciąg a_n jest zbieżny? Jeśli tak, to obliczyć jego granicę.

7. W taki sam sposób jak w zadaniu 6 stwierdzić istnienie lub nieistnienie granic ciągu

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ (a_{n-1}/2 + 2/5)^2 & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Wskazówka do zadań 6 i 7.

Przy użyciu dowolnego języka programowania (np. Maxima), obliczyć kilka pierwszych wyrazów ciągu.

Wojciech Kordecki