

Matematyka 2

Lista zadań 1.

Zadania oznaczone gwiazdką są nieco trudniejsze.

Zadania oznaczone dwiema gwiazdkami są znacznie trudniejsze i często wymagają skorzystania z programów do obliczeń symbolicznych lub samodzielnego zaprogramowania. Są nieobowiązkowe.

1. Niech

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(x^2), & g(x) &= (\ln x)^2, \\h(x) &= \arctg x, & k(x) &= (\cos x)^2.\end{aligned}$$

Dla podanych wyżej funkcji obliczyć trzecią i czwartą pochodną.

2. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcje:

$$\begin{aligned}f(x) &= x \sin x, & g(x) &= \sin(x^2), & h(x) &= x \sin(x^2), \\i(x) &= xe^{-x+1}, & j(x) &= e^{-x^3}, & k(x) &= -xe^{x^3}.\end{aligned}$$

3.** Obliczyć pochodne wyższych rzędów funkcji (≥ 5) z zadania 1 i przedstawić je w możliwie najprostszej postaci. Wyniki porównać z wynikami otrzymanymi za pomocą programów do obliczeń symbolicznych (Maxima, Wolfram Alpha, Symbolab, itp).

4. Obliczyć przybliżoną wartość $\ln x$, dla $x = 0.8$, $x = 1.8$ oraz dla $x = 2.8$ korzystając ze wzoru Taylora dla kolejnych $n = 1, 2, 3, 4$. Porównać z wartościami dokładnymi.

5. Podać wzór na przybliżoną wartość $\sin(x^2)$ z dokładnością do 0.01

- korzystając ze wzoru Maclaurina dla $\sin x$,
- obliczając współczynniki we wzorze Maclaurina dla $\sin(x^2)$.

W obu przypadkach podać resztę w postaci Lagrange'a i Cauchy'ego.

6*. Niech

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Obliczyć kilka pierwszych współczynników we wzorze Taylora dla $x_0 = 1$. Podać resztę w postaci Lagrange'a i Cauchy'ego.

7**. Korzystając z wyników zadania 6 narysować (programowo) wykresy przybliżeń i porównać je z wykresem funkcji $f(x)$.

8. Znaleźć (obliczyć, wyszukać w podręczniku lub w internecie) rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\operatorname{tg} x$. Obliczyć promień zbieżności.

9. Korzystając z zadania 8 znaleźć rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\operatorname{tg}(x^2/2)$. Znaleźć promień zbieżności.

10*. Uzasadnić, że jeśli we wzorze Maclaurina współczynniki a_k są naprzemiennie dodatnie i ujemne, to błąd przybliżenia nie przekracza wartości bezwzględnej pierwszego pominiętego wyrazu $|a_{n+1}|$. Oznacza to, że wystarczy obliczyć wyrazy do potęgi x^n włącznie.

11**. Korzystając z rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji e^x , napisać w dowolnym języku program do tworzenia tablic z wartościami funkcji e^{-x^2} dla $x = 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$ z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych.

Wojciech Kordecki