

Matematyka I

Wykład 4 Pochodne

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr zimowy 2025/26



Sieczna

Niech $y = f(x)$.

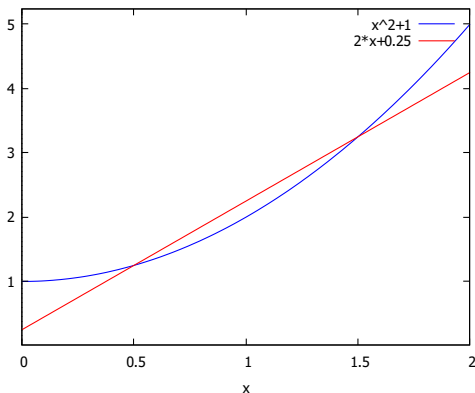
Sieczna: prosta przechodząca przez punkty (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .



Sieczna

Niech $y = f(x)$.

Sieczna: prosta przechodząca przez punkty (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .



$$f(x) = x^2 + 1.$$



Iloraz różnicowy

Niech $y = f(x)$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Δy , to przyrost wartości funkcji f przy przyroście argumentu o Δx .

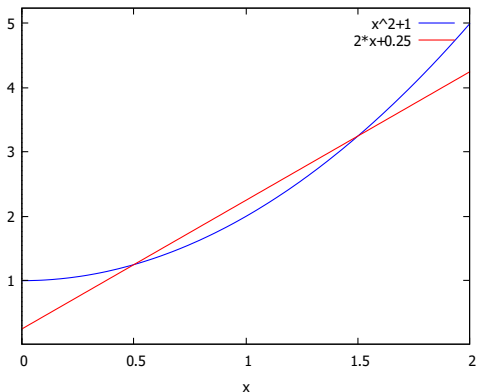
Definicja

Iloraz różnicowy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



Iloraz różnicowy – przykład (1)



$$f(x) = x^2 + 1.$$



Iloraz różnicowy – przykład (2)

$$f(x) = x^2 + 1.$$

$$\Delta x = 1.5 - 0.5 = 1, \quad \Delta y = 3.25 - 1.25 = 2.$$

α : kąt nachylenia stycznej do osi OX .

$$\operatorname{tg} \alpha = 2.$$

Równanie stycznej $y = 2x + 0.25$.



Definicja pochodnej

Niech $y = f(x)$.

Definicja

Pochodna funkcji f względem x :

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

o ile granica istnieje.

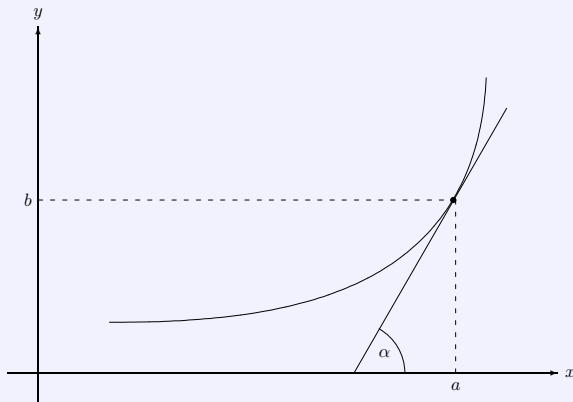
Jeżeli funkcja ma pochodną w pewnym punkcie, to mówimy, że jest w tym punkcie różniczkowalna.

Wartość pochodnej w punkcie x_0 oznaczamy $f'(x) \big|_{x=x_0}$, gdyż $f'(x_0)$ jest liczbą, czyli funkcją stałą. Jeśli jednak nie prowadzi to do nieporozumień, pisze się po prostu $f'(x_0)$.



Pochodna i styczna

Jeżeli oznaczymy $b = f(a)$ i w punkcie $x = a$ funkcja f jest różniczkowalna, to $f'(x)|_{x=a} = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (a, b) .



Różniczkowalność i ciągłość

Przypomnienie:

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 , gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$



Różniczkowalność i ciągłość

Przypomnienie:

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 , gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Twierdzenie

Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x , to jest ciągła w x .



Wzory

Twierdzenie

$$\frac{d(y+z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d(yz)}{dx} = y \frac{dz}{dx} + z \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\frac{y}{z}}{dx} = \frac{z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx}}{z^2}, \quad z \neq 0.$$



Wzory

Twierdzenie

$$\frac{d(y+z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d(yz)}{dx} = y \frac{dz}{dx} + z \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\frac{y}{z}}{dx} = \frac{z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx}}{z^2}, \quad z \neq 0.$$

Wniosek. Jeśli $c = \text{const}$, to

$$\frac{d(y+c)}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d(cy)}{dx} = c \frac{dy}{dx},$$



Wzory – inaczej

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}.$$



Wzory – inaczej

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

- Pochodna sumy jest sumą pochodnych.



Wzory – inaczej

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}.$$

- Pochodna sumy jest sumą pochodnych.
- Pochodna iloczynu **nie jest** iloczynem pochodnych.



Wzory – inaczej

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}.$$

- Pochodna sumy jest sumą pochodnych.
- Pochodna iloczynu **nie jest** iloczynem pochodnych.
- Pochodna ilorazu **nie jest** ilorazem pochodnych.



Pochodne *Maxima*

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}}{2\sqrt{\frac{\sin x}{x}}} = -\frac{\sin x - x \cos x}{2x^2 \sqrt{\frac{\sin x}{x}}}$$

```
(%i1) diff(sqrt(sin(x)/x),x,1);  
(%o1) (cos(x)/x-sin(x)/x^2)/(2*sqrt(sin(x)/x))  
(%i2) ratsimp(%);  
(%o2) -(sin(x)-x*cos(x))/(2*x^2*sqrt(sin(x)/x))
```

$$\frac{\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{\sin(x)}{x}}}$$

$$-\frac{\sin(x) - x \cos(x)}{2x^2 \sqrt{\frac{\sin(x)}{x}}}$$



Pochodne wyższych rzędów

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x) \right)',$$

gdzie

$$f^{(1)}(x) = f'(x)$$

lub

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right),$$

gdzie

$$\frac{d^1 y}{dx^1} = \frac{dy}{dx}.$$



Pochodne *Maxima* (1)

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{\frac{\sin x}{x}}$$

```
(%i3) diff(sqrt(sin(x)/x),x,2);  
(%o3) (-sin(x)/x+(2*sin(x))/x^3  
      -(2*cos(x))/x^2)/(2*sqrt(sin(x)/x))  
      -(cos(x)/x-sin(x)/x^2)^2/(4*(sin(x)/x)^(3/2))  
  
(%i4) ratsimp(%);  
(%o4) -((2*x^2-3)*sin(x)^2+2*x*cos(x)*sin(x)  
      +x^2*cos(x)^2)/(4*x^4*(sin(x)/x)^(3/2))
```



Pochodne *Maxima* (2)

$$\frac{-\frac{\sin(x)}{x} + \frac{2\sin(x)}{x^3} - \frac{2\cos(x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{\sin(x)}{x}}} - \frac{\left(\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}\right)^2}{4\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/2}}$$

$$- \frac{(2x^2 - 3)\sin(x)^2 + 2x\cos(x)\sin(x) + x^2\cos(x)^2}{4x^4\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/2}}$$



Inne oznaczenia pochodnych

$y' = f'(x)$, pierwsza pochodna, „f prim”,

$y'' = f^{(2)}(x)$, druga pochodna, „f bis”,

$y''' = f^{(3)}(x)$, trzecia pochodna.



Inne oznaczenia pochodnych

$y' = f'(x)$, pierwsza pochodna, „f prim”,

$y'' = f^{(2)}(x)$, druga pochodna, „f bis”,

$y''' = f^{(3)}(x)$, trzecia pochodna.

Jeśli $x(t)$ jest funkcją czasu, na przykład położeniem punktu x w chwili t , to

- $\dot{x}$ – pierwsza pochodna,
- $\ddot{x}$ – druga pochodna.



Współczynnik Newtona

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{dla } n > 0, n \geq k, \\ 1 & \text{dla } n = 0, k = 0, \end{cases}$$

gdzie $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$, $0! = 1$.



Trójkąt Pascala

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & & & & & \dots \end{array}$$

Trójkąt Pascala utworzony jest na podstawie wzoru

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Na przykład $\binom{4}{2} = 6$.



Obliczenia współczynnika Newtona – *Python*

<https://www.askpython.com/python/examples/binomial-coefficient>

Statistics and Mathematics are growing more and more crucial for understanding today's high-end technologies such as Data Science and Machine Learning. Achieving a thorough understanding of these mathematics concepts is important to understand many complex algorithms easily.

```
import math  
print(math.comb(4,2))
```

Wynik: 6

```
print(math.comb(60,20))  
4191844505805495  
print(math.comb(60,40))  
4191844505805495
```



Obliczenia współczynnika Newtona – *Maxima*

```
(%i1) binomial(60,20);
```

```
(%o1) 4191844505805495
```

```
(%i2) binomial(60,40);
```

```
(%o2) 4191844505805495
```



Dwumian Newtona

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} \dots \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.\end{aligned}$$



Dwumian Newtona

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} \dots \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.\end{aligned}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$



Pochodna funkcji x^n

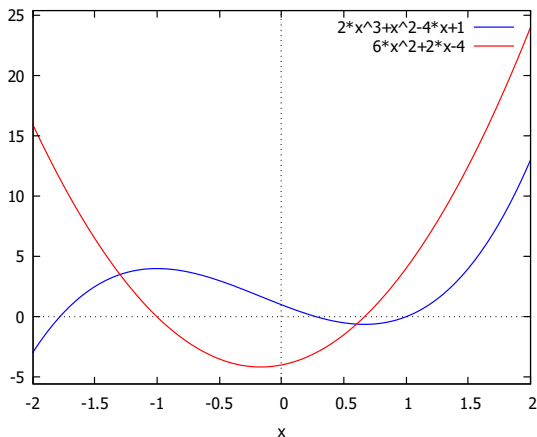
Niech $y = x^n$.

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1}.\end{aligned}$$



Pochodna wielomianu – wykresy

$$(2x^3 + x^2 - 4x + 1)' = 6x^2 + 2x - 4.$$

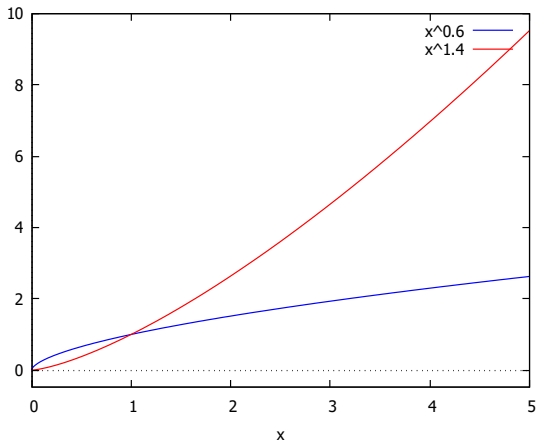


Pochodna funkcji potęgowej

Niech $y = x^a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

$$\frac{y}{x} = \frac{x^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Wykresy dla $a = 0.6$ i $a = 1.4$.



Pochodna e^x

$$(e^x)' = e^x.$$



Pochodna e^x

$$(e^x)' = e^x.$$

Jedyną funkcją spełniającą warunek

$$f'(x) = f(x)$$

jest funkcja $f(x) = e^x$.



Pochodna sinusa

Różnica sinusów

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$



Pochodna sinusa

Różnica sinusów

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Niech $y = \sin x$.

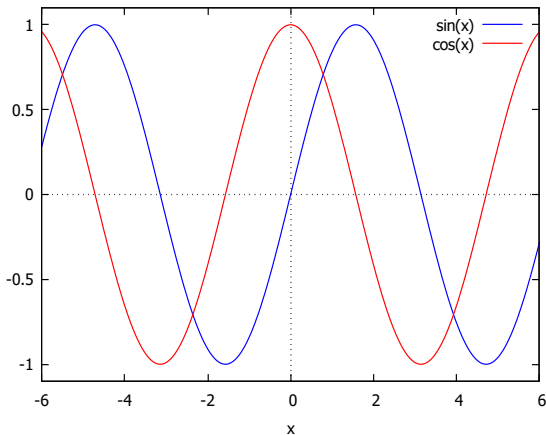
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

Analogicznie wyprowadza się wzór $(\cos x)' = -\sin x$.



Pochodna sinusa – wykresy

$$(\sin x)' = \cos x$$



Pochodna logarytmu naturalnego

Niech $y = \ln x$.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}. \end{aligned}$$



Pochodna logarytmu naturalnego

Niech $y = \ln x$.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}. \end{aligned}$$

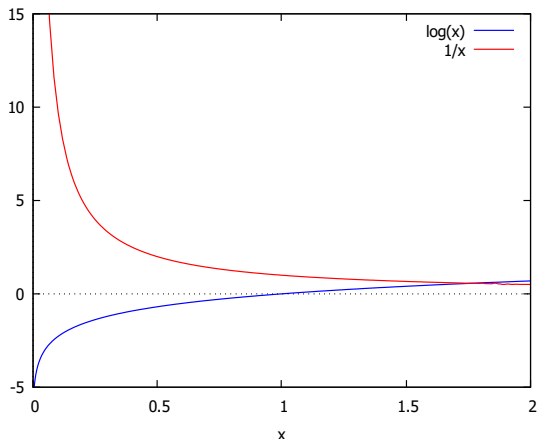
Przyjmijmy $t = x/h$. Wtedy

$$y' = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x} \ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$



Pochodna logarytmu naturalnego – wykresy

$$(\ln x)' = 1/x.$$



Pochodna logarytmu o dowolnej podstawie

Wzór na zamianę podstaw logarytmów

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$



Pochodna logarytmu o dowolnej podstawie

Wzór na zamianę podstaw logarytmów

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Niech $y = \log_a x$.

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right) = \frac{1}{\ln a} \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x \ln a},$$

dla $x > 0$.



Pochodna logarytmu o dowolnej podstawie

Wzór na zamianę podstaw logarytmów

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Niech $y = \log_a x$.

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right) = \frac{1}{\ln a} \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x \ln a},$$

dla $x > 0$.

$$\frac{d \log_a (-x)}{dx} = \frac{1}{-x \ln a},$$

dla $x < 0$.



Pochodna logarytmu o dowolnej podstawie

Wzór na zamianę podstaw logarytmów

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Niech $y = \log_a x$.

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right) = \frac{1}{\ln a} \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x \ln a},$$

dla $x > 0$.

$$\frac{d \log_a (-x)}{dx} = \frac{1}{-x \ln a},$$

dla $x < 0$.

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{|x| \ln a},$$

dla $x \neq 0$.



Pochodna wielomianu i tangensa

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$



Pochodna wielomianu i tangensa

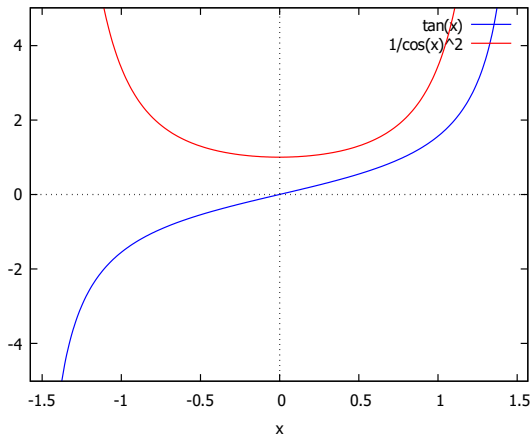
$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\cos x)(\sin x)' - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$



Pochodna tangensa – wykresy

$$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x.$$



Przykłady

$$(x^3 + x^2 + x + \sin x)'' = (3x^2 + 2x + 1 + \cos x)' = 6x + 2 - \sin x.$$



Przykłady

$$(x^3 + x^2 + x + \sin x)'' = (3x^2 + 2x + 1 + \cos x)' = 6x + 2 - \sin x.$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\sin x)'' = -\sin x,$$

$$(\sin x)''' = -\cos x$$

$$(\sin x)^{(4)} = \sin x$$



Przykłady

$$(x^3 + x^2 + x + \sin x)'' = (3x^2 + 2x + 1 + \cos x)' = 6x + 2 - \sin x.$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\sin x)'' = -\sin x,$$

$$(\sin x)''' = -\cos x$$

$$(\sin x)^{(4)} = \sin x$$

$$(\ln x)'' = (1/x)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -1/x^2.$$



Tabela pochodnych (1)

Funkcja $f(x)$	Pochodna $f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
x^a	ax^{a-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{ctg} x$ dla $x \neq +k\pi$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$
e^x	e^x
a^x dla $0 < a \neq 1$	$a^x \ln a$



Tabela pochodnych (2)

Funkcja $f(x)$	Pochodna $f'(x)$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\log_a x $ dla $0 < a, a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$



Dziwny przykład

Funkcja $f(x)$ i jej pochodna $f'(x)$.

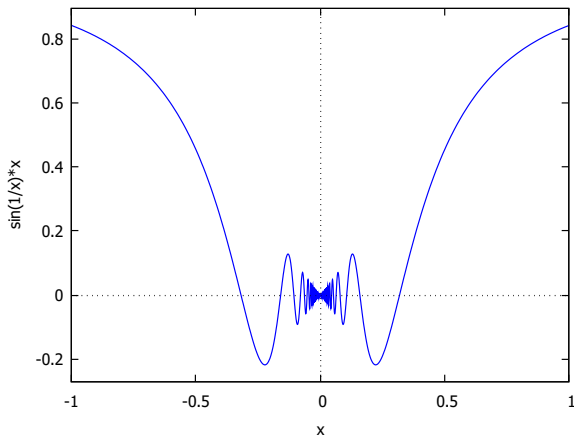
$$f(x) = x \sin(1/x),$$

$$f'(x) = \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x},$$

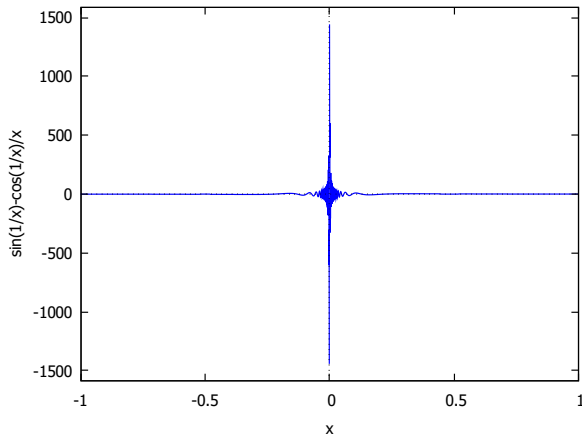
dla $x \neq 0$.



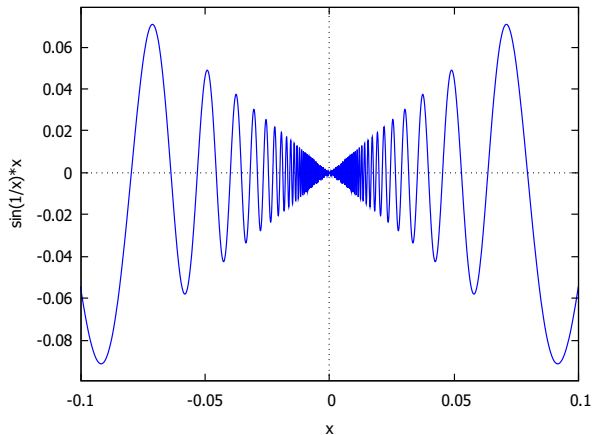
Dziwny przykład – funkcja $f(x)$



Dziwny przykład – pochodna $f'(x)$



Dziwny przykład c.d. – funkcja $f(x)$ (1)



Dziwny przykład c.d. – funkcja $f(x)$ (2)

