

Matematyka I

Wykład 3 Funkcje

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr zimowy 2025/26



Dziedzina funkcji

Funkcja $f : X \rightarrow Y$, gdzie X jest dziedziną, czyli zbiorem argumentów funkcji.

Zbiór wartości W funkcji f :

$$W = \{y : \bigvee_{x \in X} f(x) = y\}.$$

Funkcja $f : X \xrightarrow{w} Y$ gdy $W \subset Y$, natomiast $f : X \xrightarrow{na} Y$ gdy $W = Y$.



Funkcje monotoniczne

Funkcja f jest



Funkcje monotoniczne

Funkcja f jest

- rosnąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,



Funkcje monotoniczne

Funkcja f jest

- rosnąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
- malejąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$,



Funkcje monotoniczne

Funkcja f jest

- rosnąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
- malejąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$,
- niemalejąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,



Funkcje monotoniczne

Funkcja f jest

- rosnąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
- malejąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$,
- niemalejąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,
- nierosnąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.



Funkcje monotoniczne

Funkcja f jest

- rosnąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
- malejąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$,
- niemalejąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,
- nierosnąca, gdy $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkcje monotoniczne, to funkcje rosnące, malejące, niemalejące i nierosnące.

Funkcje są przedziałami monotoniczne, gdy dziedzinę można przedstawić w postaci sumy przedziałów tak, aby w każdym przedziale funkcja była monotoniczna.



Funkcje różnowartościowe i odwrotne do nich

Definicja

Funkcja f jest różnowartościowa lub wzajemnie jednoznaczna, gdy

$$x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2).$$



Funkcje różnowartościowe i odwrotne do nich

Definicja

Funkcja f jest różnowartościowa lub wzajemnie jednoznaczna, gdy

$$x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definicja

Funkcja odwrotna f^{-1} do funkcji różnowartościowej f :

$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y).$$



Funkcje różnowartościowe i odwrotne do nich

Definicja

Funkcja f jest różnowartościowa lub wzajemnie jednoznaczna, gdy

$$x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definicja

Funkcja odwrotna f^{-1} do funkcji różnowartościowej f :

$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y).$$

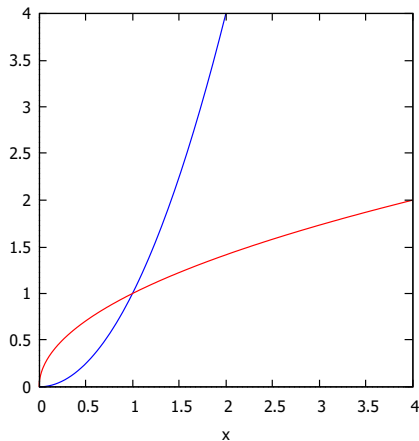
Wniosek

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$



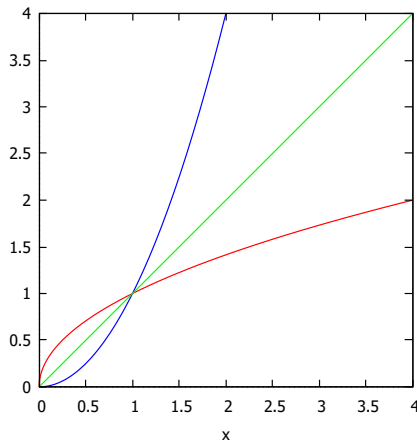
Wykresy $f(x) \leftrightarrow f^{-1}(x)$

$$f(x) = x^2, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$



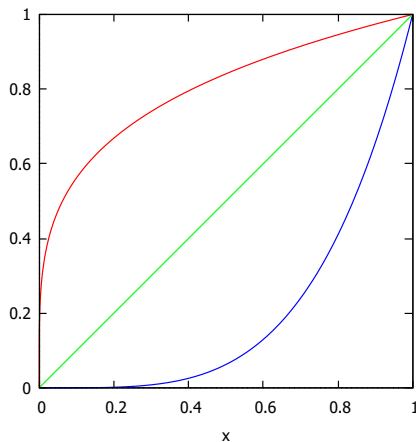
Wykresy $f(x) \leftrightarrow f^{-1}(x)$ – symetria

$$f(x) = x^2, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$



Wykresy $f(x) \leftrightarrow f^{-1}(x)$ – lusterko

$$f(x) = x^4, \quad f^{-1}(x) = x^{1/4}$$



Wykresy: *Maxima*

```
plot2d([x^4,x^(1/4),x], [x,0,1], [y,0,1],  
      same_xy,[legend,false])$
```

Opcje:

- `same_xy` – taka sama skala x i y ,
- `legend,false` – bez opisów krzywych.



Definicje

Funkcje elementarne, to funkcje potęgowe, trygonometryczne, wykładnicze, odwrotne do nich (z ewentualnie ograniczoną dziedziną) oraz sumy, iloczyny i ilorazy funkcji elementarnych.



Funkcje potęgowe, wielomiany, funkcje wymierne

Potęga (n -ta potęga) liczby x :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastek stopnia n (n -tego stopnia): $\sqrt[n]{x}$ – funkcja odwrotna do potęgi x^n , dla $x \geq 0$.

Wielomiany stopnia n , gdy $a_n \neq 0$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

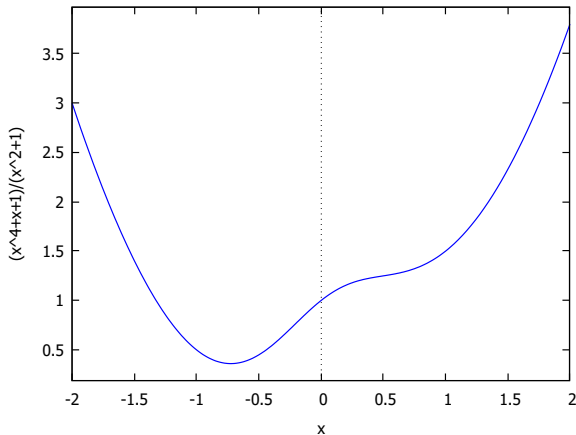
Funkcje wymierne:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{gdzie } P, Q \text{ – wielomiany.}$$



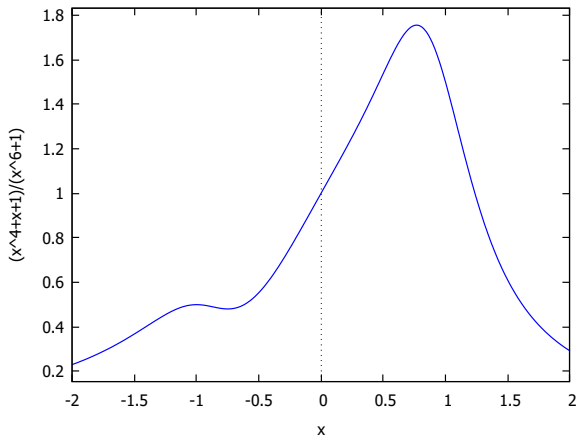
Wykres funkcji wymiernej (1)

$$f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + 1}$$



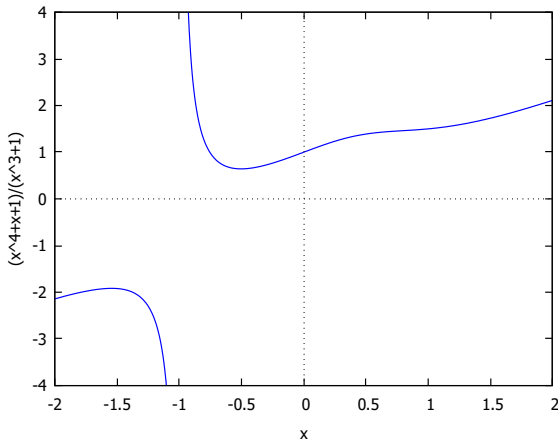
Wykres funkcji wymiernej (2)

$$f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^6 + 1}$$



Wykres funkcji wymiernej (3)

$$f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^3 + 1}$$



Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne

Funkcje trygonometryczne, to $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Funkcje odwrotne do trygonometrycznych z dziedziną ograniczoną do przedziałów, w których funkcje trygonometryczne są różnowartościowe, to funkcje cyklometryczne (nazwy poprzedzone symbolem arc: $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$).



Dziedziny funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych

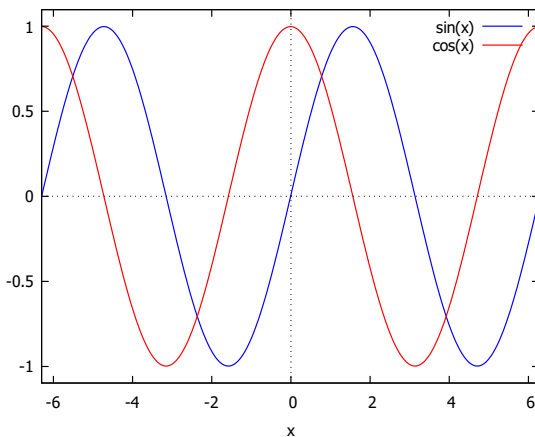
Dziedziny i zbiory wartości funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych zestawiono w tabeli.

Funkcja	dziedzina	zbiór wartości
$\sin x, \cos x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\operatorname{tg} x$	$(-\infty, \infty) \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$	$(-\infty, \infty)$
$\operatorname{ctg} x$	$(-\infty, \infty) \setminus \{k\pi\}$	$(-\infty, \infty)$
$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$(-\infty, \infty)$	$[-\pi/2, \pi/2]$
$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \pi]$

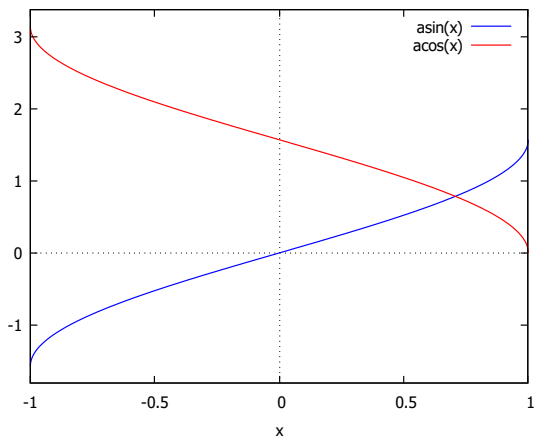
gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Funkcja $\sin x$, $\cos x$



Funkcja $\arcsin x$ i $\arccos x$



Funkcje wykładnicze

Funkcje wykładnicze są postaci a^x , gdzie $a > 0$. Dla $x = p/q$, $q \geq 0$, czyli wymiernych, $a^x = \sqrt[q]{a^p}$. Dla x niewymiernych

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n/q_n}$$

dla $p_n/q_n \rightarrow x$, gdzie p_n, q_n – całkowite.



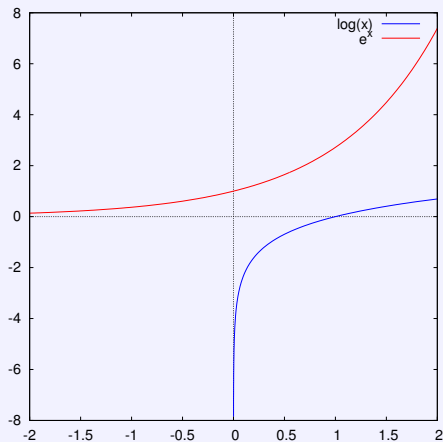
Funkcje logarytmiczne

Funkcje logarytmiczne o podstawie a , to funkcje odwrotne do wykładniczych a^x :

$$y = \log_a x \iff x = a^y, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Logarytm naturalny, to logarytm o podstawie e , oznaczany $\ln x = \log_e x$. Dla $a = 10$ (logarytm dziesiętny) lub $a = 2$ (logarytm binarny) zwykle opuszcza się podstawę logarytmu, tzn. $\log x = \log_{10} x$ lub $\log x = \log_2 x$. W literaturze informatycznej stosuje się na ogół logarytmy binarne. W literaturze technicznej i ekonomicznej, najczęściej stosowane są logarytmy dziesiętne. Często jest stosowane oznaczenie $\exp x = e^x$ dla funkcji wykładniczej o podstawie e . Wtedy $\exp x$ i $\ln x$ są parą funkcji odwrotnych.



Funkcja $\exp x$ i $\ln x$ 

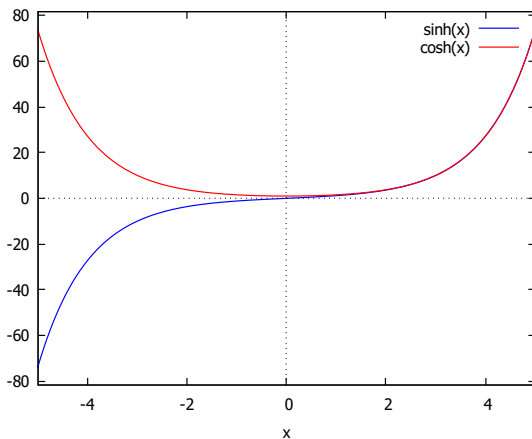
Funkcje hiperboliczne

Sinus hiperboliczny i cosinus hiperboliczny:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Funkcje $\sinh x$, $\cosh x$



$\cosh x$: krzywa łańcuchowa



cosh x: most grunwaldzki



ar sinh x i ar cosh x

funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych, to arcus sinus hiperboliczny i arcus cosinus hiperboliczny:

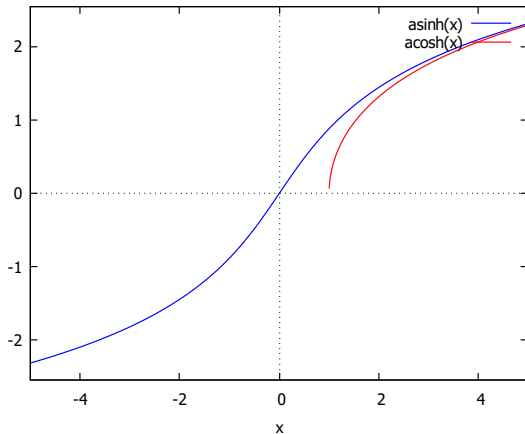
$$\operatorname{ar sinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{ar cosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right),$$

dla $x \geq 0$. Funkcja $\operatorname{ar cosh} x$ jest funkcją odwrotną do funkcji $\cosh x$ ograniczoną do dziedziny $[0, \infty)$ w której jest różnowartościowa. Dziedziną funkcji $\operatorname{ar cosh} x$ jest $[1, \infty)$.



Funkcje $\operatorname{ar sinh} x$, $\operatorname{ar cosh} x$



Definicja Heinego granicy funkcji

Definicja

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , jeśli dla każdego ciągu $x_n \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$ przy $n \rightarrow \infty$, zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Granica jest niewłaściwa, gdy $g = \infty$ lub $g = -\infty$ i w nieskończoności (minus nieskończoności), gdy $x_0 = \infty$ lub $x_0 = -\infty$



Przykład

Niech

$$f(x) = x^2.$$



Przykład

Niech

$$f(x) = x^2.$$

Przyjmijmy $x_n = 1/n$. Wtedy

$$f(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow 0.$$



Przykład

Niech

$$f(x) = x^2.$$

Przyjmijmy $x_n = 1/n$. Wtedy

$$f(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow 0.$$

Gdy $x_n = \sqrt{1/n}$, to

$$f(x_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$



Przykład

Niech

$$f(x) = x^2.$$

Przyjmijmy $x_n = 1/n$. Wtedy

$$f(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow 0.$$

Gdy $x_n = \sqrt{1/n}$, to

$$f(x_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Tak samo, gdy tylko $x_n \rightarrow 0$.



Przykład

Niech

$$f(x) = x^2.$$

Przyjmijmy $x_n = 1/n$. Wtedy

$$f(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow 0.$$

Gdy $x_n = \sqrt{1/n}$, to

$$f(x_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Tak samo, gdy tylko $x_n \rightarrow 0$.

Wniosek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$



Definicja Cauchy'ego granicy funkcji (1)

Definicja

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{|x - x_0| < \delta} |f(x) - g| < \varepsilon.$$



Definicja Cauchy'ego granicy funkcji (2)

Definicja

Liczba g jest granicą funkcji f w nieskończoności jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{M > 0} \bigwedge_{x > M} |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Liczba g jest granicą funkcji f w minus nieskończoności jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{M > 0} \bigwedge_{x < -M} |f(x) - g| < \varepsilon.$$



Definicja Cauchy'ego granicy funkcji (3)

Definicja

Funkcja f ma granicę niewłaściwą nieskończoność w punkcie x_0 , jeśli

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{|x-x_0|<\delta} f(x) > M.$$

Funkcja f ma granicę niewłaściwą minus nieskończoność w punkcie x_0 , jeśli

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{|x-x_0|<\delta} f(x) < -M.$$



Przykład

$$f(x) = x^2.$$

Szukamy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



Przykład

$$f(x) = x^2.$$

Szukamy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{|x - x_0| < \delta} |f(x) - g| < \varepsilon.$$



Przykład

$$f(x) = x^2.$$

Szukamy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{|x - x_0| < \delta} |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Ustalamy $\varepsilon > 0$.



Przykład

$$f(x) = x^2.$$

Szukamy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{|x - x_0| < \delta} |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Ustalamy $\varepsilon > 0$.

Pytamy, czy istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|x| < \delta$, to $x^2 < \varepsilon$?



Przykład

$$f(x) = x^2.$$

Szukamy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{|x - x_0| < \delta} |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Ustalamy $\varepsilon > 0$.

Pytamy, czy istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|x| < \delta$, to $x^2 < \varepsilon$?

Istnieje, bo wystarczy przyjąć $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.



Przykład

$$f(x) = x^2.$$

Szukamy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{|x - x_0| < \delta} |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Ustalamy $\varepsilon > 0$.

Pytamy, czy istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|x| < \delta$, to $x^2 < \varepsilon$?

Istnieje, bo wystarczy przyjąć $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Istotnie tak jest, bo jeśli $|x| < \delta$, to $x^2 < \delta^2 = \varepsilon$.



Operacje na granicach

Twierdzenie

Jeśli istnieją odpowiednie granice funkcji f i g (również w nieskończoności i minus nieskończoności), to

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$
- *Jeśli ponadto $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, to*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$



Własności granic – nierówność

Twierdzenie

Jeśli dla każdego x spełniona jest nierówność $f(x) \leq g(x)$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$



Własności granic – nierówność

Twierdzenie

Jeśli dla każdego x spełniona jest nierówność $f(x) \leq g(x)$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Twierdzenie

Jeśli $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = g,$$

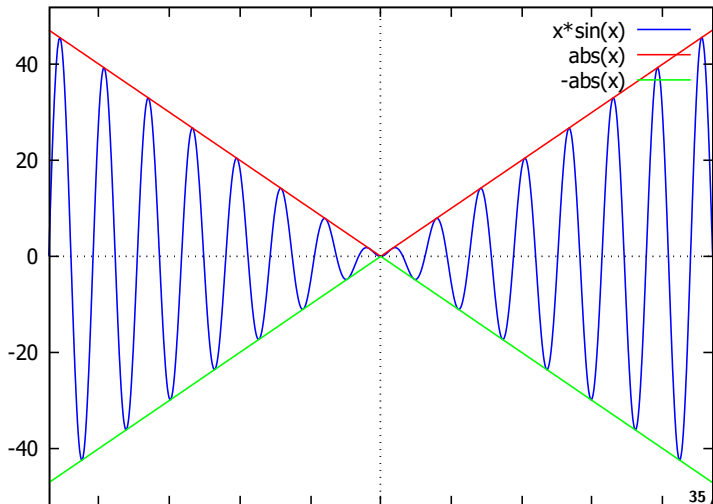
to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g.$$



Przykład

$$-x \leq x|\sin x| \leq x.$$



Własności granic – złożenie

Jeśli zbiór wartości W_f funkcji f jest zawarty w dziedzinie D_g funkcji g :

$$W_f \subseteq D_g,$$

to funkcja $g(f(x))$ jest złożeniem (superpozycją) funkcji g i f

Twierdzenie

Jeśli istnieją granice

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0,$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = z_0.$$



Granice jednostronne

Definicje granic jednostronnych, tzn. prawostronnych $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$ i lewostronnych $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0$ są analogiczne do definicji (obustronnej) granicy, przy dodatkowych warunkach $x_n > x_0$ lub $x_n < x_0$ w definicji Heinego i $x > x_0$ lub $x < x_0$ w definicji Cauchy'ego.

Przykład.

Granice niewłaściwe jednostronne:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$



Często spotykane granice

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty, \text{ dla } a > 0,$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \text{ dla } a > 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0.$



Funkcja e^x

Bezpośrednio z definicji liczby e można otrzymać ważne granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$



Symbole nieoznaczone

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{\infty}{-\infty}$
- 0^0
- $0 \cdot \infty$
- 1^∞
- ∞^0



Symbole nieoznaczone

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- 0^0
- $0 \cdot \infty$
- 1^∞
- ∞^0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = \infty.$$



Definicja ciągłości

Definicja

Funkcja f jest ciągła w punkcie a , gdy

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Funkcja jest ciągła w punkcie a jednostronnie (lewostronnie lub prawostronnie), gdy granicę zastąpimy granicą jednostronną.



Definicja ciągłości

Definicja

Funkcja f jest ciągła w punkcie a , gdy

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Funkcja jest ciągła w punkcie a jednostronnie (lewostronnie lub prawostronnie), gdy granicę zastąpimy granicą jednostronną.

Definicja

Funkcja f jest ciągła, gdy jest ciągła w każdym punkcie.



Ciągłość przedziałami

Definicja

Funkcja jest przedziałami ciągła, gdy jej dziedzinę można przedstawić w postaci sumy rozłącznych przedziałów tak, aby w każdym przedziale była ciągła.

Punkt nieciągłości – punkt x_0 , w którym funkcja nie jest ciągła.

Własność

Funkcja, która ma skończoną liczbę punktów nieciągłości, jest przedziałami ciągła.



Sufit, podłoga, całość

Przykład. Funkcje sufit i podłoga:

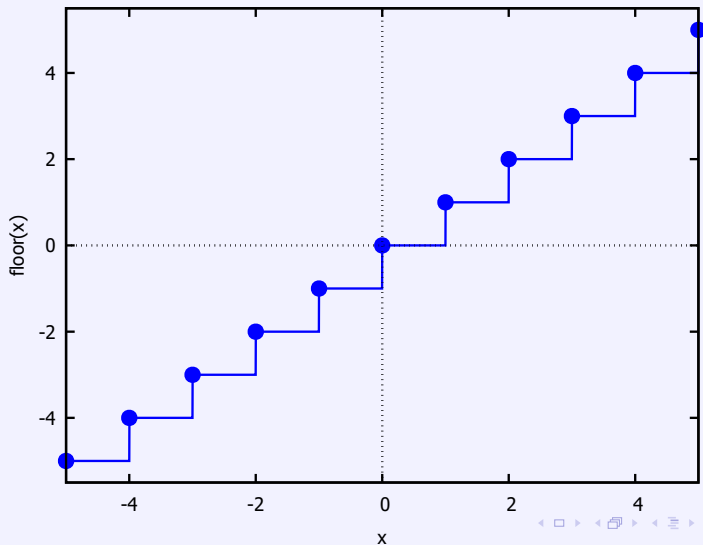
$f(x) = \lfloor x \rfloor$ – (podłoga) największa liczba całkowita n taka, że $n \leq x$,
 $g(x) = \lceil x \rceil$ – (sufit) najmniejsza liczba całkowita n taka, że $n \geq x$.

Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są nieciągłe w dla $x = n$, ale $f(x)$ jest ciągła prawostronnie, natomiast $g(x)$ jest ciągła lewostronnie dla $x = n$.
Inne oznaczenie $\lfloor x \rfloor = [x]$ – całość z x .



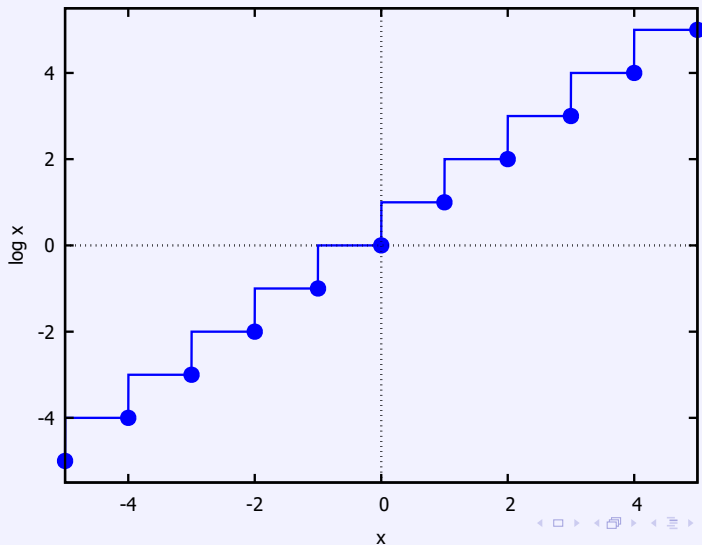
Podłoga

Funkcja $\lfloor x \rfloor$ prawostronnie ciągła.

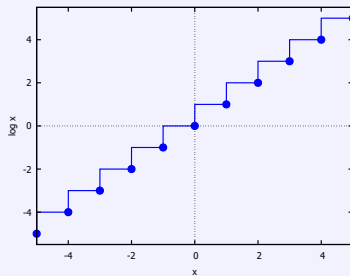
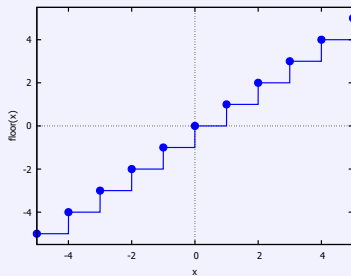


Sufit

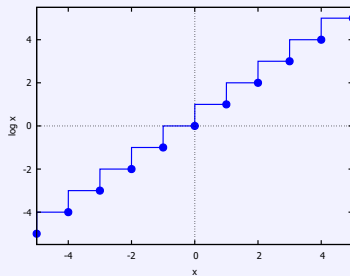
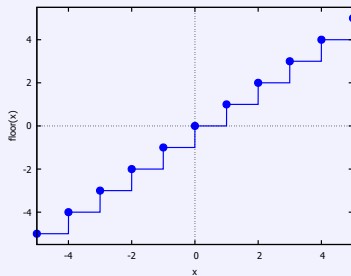
Funkcja $\lceil x \rceil$ lewostronnie ciągła.



Podłoga i sufit



Podłoga i sufit



$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$



Własności funkcji ciągłych

Sumy, różnice, iloczyn i ilorazy

Sumy, różnice, iloczyn i ilorazy funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi.

Zwróćmy uwagę, że wbrew często formułowanym opiniom, funkcja $f(x) = 1/x$ jest ciągła, gdyż dla każdego $a \neq 0$ mamy $\lim_{x \rightarrow a} 1/x = 1/a$. Rozważanie ciągłości w punkcie $a = 0$ nie ma sensu, gdyż $x = 0$ nie należy do dziedziny funkcji $f(x) = 1/x$.



Własności funkcji ciągłych

Sumy, różnice, iloczyn i ilorazy

Sumy, różnice, iloczyn i ilorazy funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi.

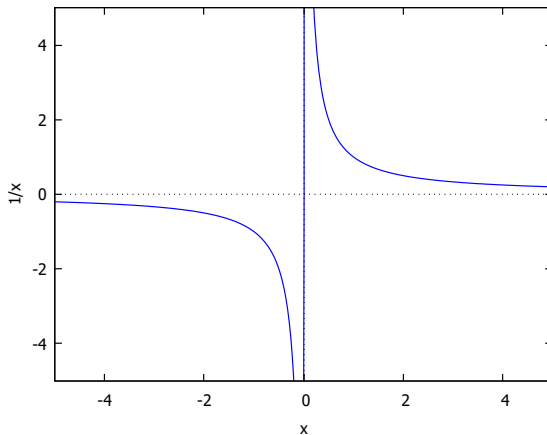
Zwróćmy uwagę, że wbrew często formułowanym opiniom, funkcja $f(x) = 1/x$ jest ciągła, gdyż dla każdego $a \neq 0$ mamy $\lim_{x \rightarrow a} 1/x = 1/a$. Rozważanie ciągłości w punkcie $a = 0$ nie ma sensu, gdyż $x = 0$ nie należy do dziedziny funkcji $f(x) = 1/x$.

Poprawne sformułowanie

Funkcji $f(x) = 1/x$ nie się uzupełnić o wartość w punkcie $x = 0$ tak, aby uzupełniona o tę wartość funkcja określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ była ciągła.



Funkcja $1/x$



Złożenie funkcji

Superpozycja (złożenie) funkcji f i g jest oznaczana przez $f(g(x))$.

Argumentami funkcji f są wartości funkcji g .

Aby superpozycja funkcji była poprawnie określona, zbiór wartości funkcji g musi być zawarty w dziedzinie funkcji f .

Twierdzenie

Superpozycja funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.



Przykład (1)

Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Ponieważ

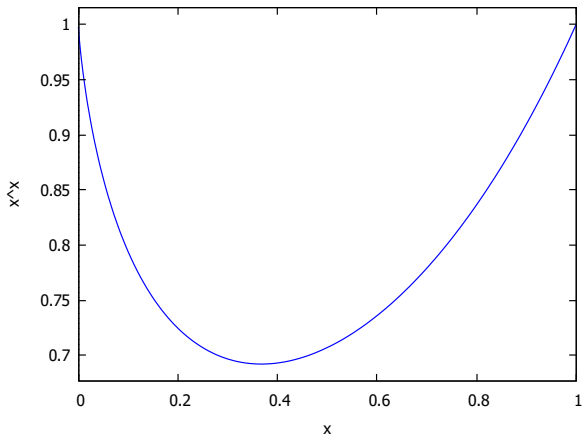
$$x^x = \exp(\ln x^x) = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

oraz funkcja $\exp x$ jest ciągła, to

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x\right) = \exp(0) = e^0 = 1.$$



Przykład (2)



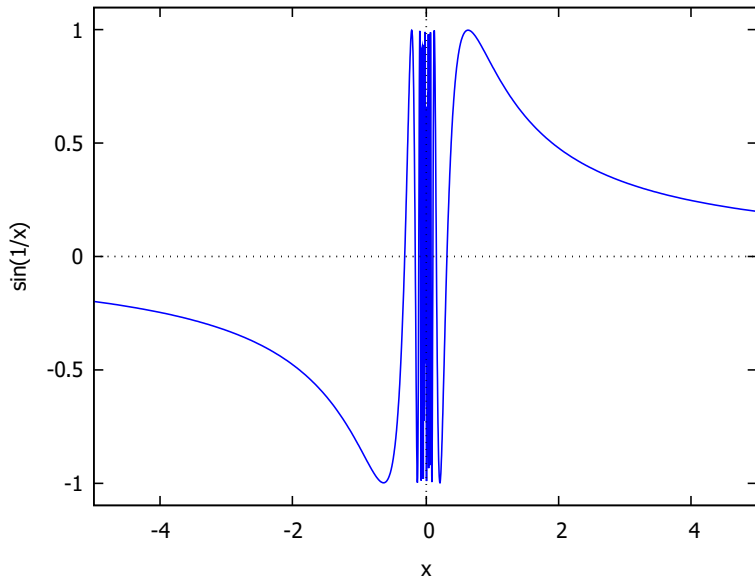
Przykłady

Funkcja określona na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \sin(1/x)$$

dla $x \neq 0$.



Funkcja $\sin(1/x)$ 

Funkcja określona na $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$



Funkcja $x \sin(1/x)$

