

Matematyka I

Wykład 2 Szeregi

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr zimowy 2025/26



Do starannego przeczytania!

Rozdział 5 w podręczniku:

K. Selwat. *Wybrane zagadnienia matematyki*. Seria Wydawnicza PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2020.

K. Selwat. *Wybrane zagadnienia matematyki*. Legnica 2011.



Definicja szeregu liczbowego

Szereg, to ciąg sum częściowych

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + \dots + a_n, \dots$$

ciągu $\{a_n\}$. Jeśli $\{s_n\}$ jest zbieżny, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

jest sumą szeregu, a szereg jest zbieżny.

Ciąg s_n nie zawsze jest zbieżny (nawet do $\pm\infty$), wtedy szereg jest rozbieżny.

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow \infty$, to szereg jest rozbieżny do nieskończoności.



Definicja szeregu liczbowego

Szereg, to ciąg sum częściowych

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + \dots + a_n, \dots$$

ciągu $\{a_n\}$. Jeśli $\{s_n\}$ jest zbieżny, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

jest sumą szeregu, a szereg jest zbieżny.

Ciąg s_n nie zawsze jest zbieżny (nawet do $\pm\infty$), wtedy szereg jest rozbieżny.

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow \infty$, to szereg jest rozbieżny do nieskończoności.

Uwaga. Często utożsamia się symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ również z ciągiem $\{s_n\}$, a nie tylko z jego granicą, czyli sumą szeregu.



Szereg alternujący

Szereg

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 2k - 1, \\ -1, & \text{dla } n = 2k, \end{cases}$$
$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 2k - 1, \\ 0, & \text{dla } n = 2k, \end{cases}$$

jest rozbieżny.



Szereg geometryczny

Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q},$$

jest zbieżny dla $|q| < 1$.

Rozbieżny dla $|q| \geq 1$.



Szereg harmoniczny

Szereg harmoniczny rzędu α :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

dla ustalonego rzeczywistego α .

Zbieżny dla $\alpha > 1$, rozbieżny dla $\alpha \leq 1$.



Szereg harmoniczny: $\alpha = 1$

Szereg rozbieżny. Dowód Mikołaja z Oresme (1320–1382).

Wikipedia:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Miko%C5%82aj_z_Oresme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>1/2} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>1/2} + \dots \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\substack{2^n \text{ składników} \\ >1/2}} + \dots\end{aligned}$$



Szereg skończony

Suma skończonej liczby składników:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$



Szereg skończony

Suma skończonej liczby składników:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Przykład.

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Szereg skończony

Suma skończonej liczby składników:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Przykład.

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1 + 2 + \cdots + 4 = \sum_{i=1}^4 i = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$



Szereg skończony

Suma skończonej liczby składników:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Przykład.

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1 + 2 + \cdots + 4 = \sum_{i=1}^4 i = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

Jeśli począwszy od pewnego k wszystkie $a_n = 0$, to szereg jest skończony, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$



Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Nie jest to warunek dostateczny: szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny, chociaż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$



Kryterium d'Alemberta

Niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$ i rozbieżny, gdy $g > 1$

Gdy $g = 1$, to kryterium nie rozstrzyga.



Kryterium d'Alemberta – przykład (1)

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Kryterium nie rozstrzyga, ale szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny.



Kryterium d'Alemberta – przykład (2)

$$a_n = \frac{1}{n^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1.$$

Kryterium nie rozstrzyga, ale szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

jest zbieżny.

Maxima:

`sum(1/n^2, n, 1, inf), simpsum;`



Kryterium d'Alemberta – przykład (3)

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

dla $x > 0$.

Przypomnienie: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, $0! = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1. \quad \text{Sprawdzić!}$$

Wniosek: szereg jest zbieżny dla każdego x .



Kryterium Cauchy'ego

Niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$ i rozbieżny, gdy $g > 1$

Gdy $g = 1$, to kryterium nie rozstrzyga.



Kryterium Cauchy'ego – przykład (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|aq^n|} = |q|.$$

- Jeżeli $q < 1$, to szereg zbieżny.
- Jeżeli $q > 1$, to szereg rozbieżny.
- Jeżeli $q = 1$, to kryterium nie rozstrzyga, ale szereg rozbieżny.



Kryterium Cauchy'ego – przykład (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^c}{c^n}$$

dla $c > 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^c}{c^n}} = \frac{1}{c} < 1. \quad \text{Sprawdzić!}$$

Szereg jest zbieżny,



Porównanie kryteriów

Jeżeli kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga, to kryterium d'Alemberta też nie rozstrzyga.

Jeżeli kryterium d'Alemberta rozstrzyga, to kryterium Cauchy'ego też rozstrzyga.



Porównanie kryteriów

Jeżeli kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga, to kryterium d'Alemberta też nie rozstrzyga.

Jeżeli kryterium d'Alemberta rozstrzyga, to kryterium Cauchy'ego też rozstrzyga.

Kryterium Cauchy'ego jest silniejsze od kryterium d'Alemberta.



Kryterium Leibniza

Niech $a_n > 0$ będzie ciągiem nierosnącym i takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
Wtedy szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

jest zbieżny.



Kryterium Leibniza – przykład

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Ponieważ $a_n \rightarrow 0$ oraz a_n jest naprzemienny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny.



Funkcje wzajemnie jednoznaczne

Funkcja jest wzajemnie jednoznaczna (różnowartościowa), gdy

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Inaczej mówiąc: różnym argumentom odpowiadają różne wartości funkcji.



Funkcje odwrotne

Niech $f(x)$ funkcja wzajemnie jednoznaczna.

$$x = g(y) = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Funkcja $g = f^{-1}$ jest funkcją odwrotną do funkcji f .



Wielomiany

Funkcja

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

jest wielomianem stopnia n , gdy $a_n \neq 0$.



Funkcje wykładnicze

Funkcja

$$f(x) = a^x$$

jest dla $a > 0$ i $a \neq 1$ funkcją wykładniczą o podstawie a .

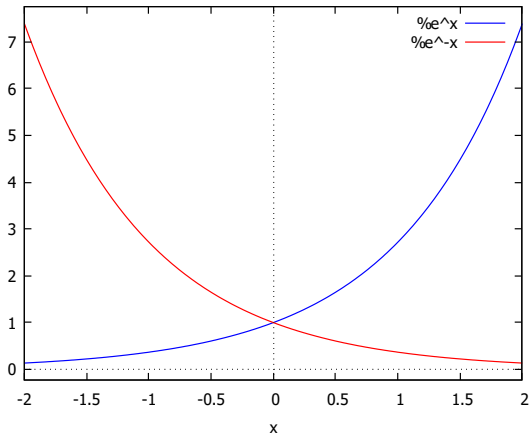
Jeśli $a > 1$ to funkcja wykładnicza jest rosnąca, a jeśli $a < 1$ to jest malejąca.

Ważny przypadek, gdy podstawą jest liczba e .

Oznaczenie:

$$\exp(x) = e^x.$$



Funkcje wykładnicza e^x i e^{-x} 

Logarytmy

Logarytm o podstawie a jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej o podstawie a .

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$



Elementarne własności logarytmów

$$\log_a b = c \iff a^c = b.$$



Elementarne własności logarytmów

$$\log_a b = c \iff a^c = b.$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a a^b = b, a^{\log_a b} = b.$$



Elementarne własności logarytmów

$$\log_a b = c \iff a^c = b.$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a a^b = b, a^{\log_a b} = b.$$

Własności logarytmów

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$



Funkcje trygonometryczne – przypomnienie

- $\sin x$,
- $\cos x$,
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.



Logarytm naturalny

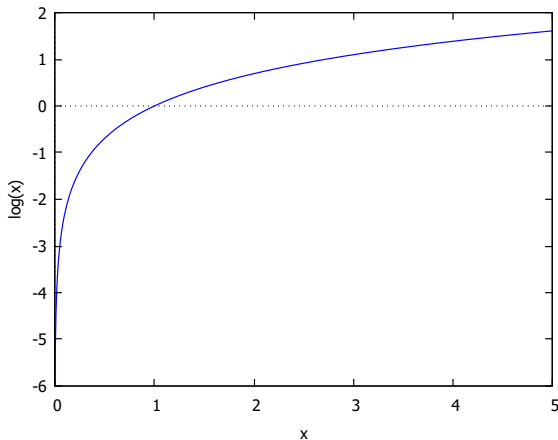
Logarytm naturalny, to logarytm o podstawie e .

Oznaczenie: $\ln x$.

W językach programowania na ogół $\log(x)$ oznacza logarytm naturalny: C++, Python itd. ale w Pascalu jest $\ln(x)$.



Logarytm naturalny – wykres



Definicje

Wyrazy szeregu mogą być nie tylko liczbami, ale też funkcjami.
Wtedy dla każdego x szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest szeregiem liczbowym.
Jeśli taki szereg jest zbieżny, to wzór

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1)$$

definiuje funkcję, której dziedziną jest zbiór tych argumentów x , dla których szereg (1) jest zbieżny.



Szereg potęgowy

Szczególnie ważny jest przypadek, gdy $f_n(x) = a_n x^n$. Wtedy szereg funkcyjny (1) przybiera postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2)$$

Szereg ten jest, jak łatwo zauważyć zbieżny przynajmniej dla $x = 0$, a może też być zbieżny dla argumentów z większego zbioru, nawet dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.



Szereg potęgowy

Szczególnie ważny jest przypadek, gdy $f_n(x) = a_n x^n$. Wtedy szereg funkcyjny (1) przybiera postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2)$$

Szereg ten jest, jak łatwo zauważyć zbieżny przynajmniej dla $x = 0$, a może też być zbieżny dla argumentów z większego zbioru, nawet dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Przedstawienie funkcji $f(x)$ w postaci (2), nazywa się rozwinięciem funkcji $f(x)$ w szereg potęgowy.



Liczba e i funkcja e^x

Definicja e^x jako granicy:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Definicja e^x jako sumy szeregu:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Liczba e jest niewymierna: $e \approx 2.718281828459045$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} \approx 2.7083$$



$\exp(x)$ i przybliżenie

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\exp(x) \approx 1 + x,$$

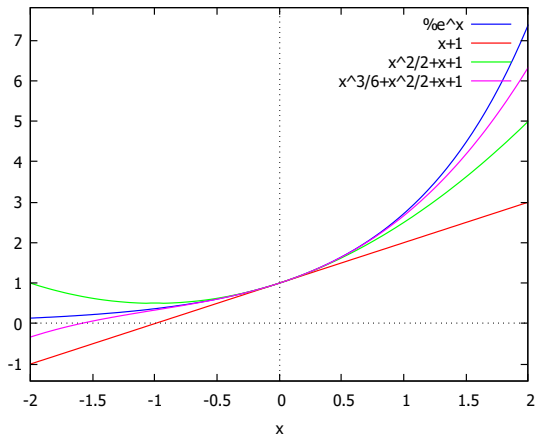
$$\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

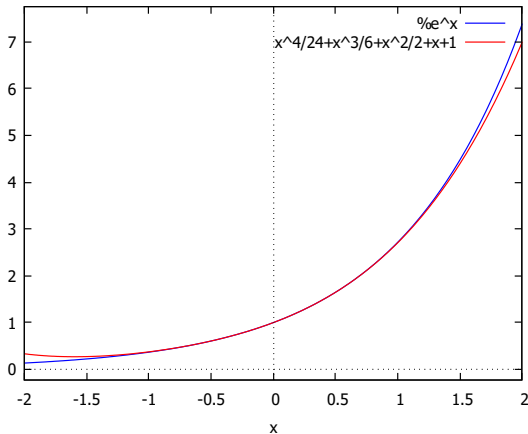
...



$\exp(x)$ i przybliżenie wykres (1)



$\exp(x)$ i przybliżenie wykres (2)



Maxima

```
plot2d([exp(x), 1+x, 1+x+x^2/2, 1+x+x^2/2+x^3/6], [x, -2, 2])$
```

```
plot2d([exp(x), 1+x+x^2/2+x^3/6+x^4/24], [x, -2, 2])$
```

