

Matematyka I

Wykład 1 Ciągi

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr zimowy 2025/26



Czego będziemy się uczyć?

- Ciągi liczbowe. Granica ciągu.
- Szeregi liczbowe i kryteria ich zbieżności.
- Granice i ciągłość funkcji.
- Funkcje elementarne i ich własności.
- Pochodna funkcji i techniki jej obliczania.
- Zastosowania rachunku różniczkowego.
- Macierze i działania na nich. Wyznaczniki. Macierz odwrotna.
- Układy równań liniowych i metody ich rozwiązywania.
- Liczby zespolone i ich własności
- Wielomiany zespolone. Zespolone funkcje wymierne.



Czego będziemy się uczyć?

- Ciągi liczbowe. Granica ciągu.
- Szeregi liczbowe i kryteria ich zbieżności.
- Granice i ciągłość funkcji.
- Funkcje elementarne i ich własności.
- Pochodna funkcji i techniki jej obliczania.
- Zastosowania rachunku różniczkowego.
- Macierze i działania na nich. Wyznaczniki. Macierz odwrotna.
- Układy równań liniowych i metody ich rozwiązywania.
- Liczby zespolone i ich własności
- Wielomiany zespolone. Zespolone funkcje wymierne.

Karta modułu (sylabus) [Matematyka I](#)



Rozliczenie

Wykład: egzamin pisemny – rozwiązywanie zadań oraz zagadnienia teoretyczne.

Ćwiczenia: sposób zaliczenia i wymagania określi prowadzący, dr Leopold Habiniak.



Rozliczenie

Wykład: egzamin pisemny – rozwiązywanie zadań oraz zagadnienia teoretyczne.

Ćwiczenia: sposób zaliczenia i wymagania określi prowadzący, dr Leopold Habiniak.

Ocena dobra lub wyższa zwalnia z egzaminu.

Ocenę taką można próbować poprawiać na egzaminie na wyższą, bez obawy o jej pogorszenie



Podręczniki podstawowe

K. Selwat. *Wybrane zagadnienia matematyki*. Seria Wydawnicza PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2020.

J. Płaskonka-Fietkowska, K. Selwat. *Elementy matematyki wyższej*. Seria Wydawnicza PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2020.

T. Jurlewicz, Z. Skoczylas. *Algebra i geometria analityczna, Przykłady i zadania*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2020.

M. Gewert, Z. Skoczylas. *Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018.



Podręczniki podstawowe – DBC

K. Selwat. Wybrane zagadnienia matematyki. Legnica 2011.

J. Płaskonka, K. Selwat. Repetytorium z matematyki dla studentów pierwszego roku. Legnica 2010.



Podręczniki uzupełniające

T. Jurlewicz, Z. Skoczylas. *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2016.

M. Gewert, Z. Skoczylas. *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2019.

W. Krysicki, L. Włodarski. *Analiza matematyczna w zadaniach. Część 1* PWN, Warszawa 2015.



Podręczniki uzupełniające – klasyka

F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

K. Kuratowski. *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa (wiele wydań).



Programy

Maxima – program do obliczeń symbolicznych. Darmowy odpowiednik programu *Mathematica* firmy Wolfram Research.

Windows, Linux, macOS X:

<http://maxima.sourceforge.net/download.html>

Android:

<https://maxima-on-android.softonic.pl/android>

Scilab – program do obliczeń numerycznych. Darmowy odpowiednik programu *Matlab*.

Windows, Linux, macOS X:

<https://www.scilab.org/download/scilab-2025.1.0>

Wolfram Alpha – wszechstronny program matematyczny firmy Wolfram Research.

<https://www.wolframalpha.com/>



Zdania

Zdanie przyjmuje tylko dwie wartości logiczne:

1 – prawda,

0 – fałsz.

Zdania będziemy oznaczać na ogół małymi literami: $p, q, r, s, \dots$



Działania na zdaniach

Tabele działań dwuargumentowych $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \underline{\vee} q$, $p \implies q$, $p \iff q$, gdzie na lewym brzegu tabeli podane są wartości p , a na górnym – wartości q , są następujące:

$\wedge$	0	1	$\vee$	0	1	$\underline{\vee}$	0	1	$\implies$	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
						$\iff$	0	1			
						0	1	0			
						1	0	1			

Negację określa tabela:

p	0	1
$\sim p$	1	0

W implikacji $p \implies q$, zdanie p nazywa się poprzednikiem implikacji, a zdanie q – następnikiem.



Formy zdaniowe

Forma zdaniowa to wyrażenie postaci $p(x)$, które staje się zdaniem po podstawieniu za x dowolnego elementu zbioru X (czyli $x \in X$), zwanego dziedziną formy zdaniowej $p(x)$. Zbiór tych elementów zbioru X , dla których $p(x)$ jest zdaniem prawdziwym, oznaczamy

$$\{x \in X : p(x)\}.$$



Kwantyfikatory

Kwantyfikatorem nazywamy zwrot „dla każdego $x \in X$ ” (kwantyfikator ogólny) lub „istnieje $x \in X$ takie, że” (kwantyfikator szczegółowy). Kwantyfikatory wiążą zmienną w formie zdaniowej, tworząc z niej zdanie. Kwantyfikator ogólny oznaczamy symbolem $\bigwedge$, a kwantyfikator szczegółowy – symbolem $\bigvee$.

Przykład.

$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 0$ – jest zdaniem prawdziwym.

$\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{x} < 0$ – jest zdaniem fałszywym.

$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} y > x$ – jest zdaniem (???)



Zbiory liczbowe

Zbiór liczb naturalnych:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Zbiór liczb całkowitych:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Zbiór liczb wymiernych:

$$\mathbb{Q} = \left\{v : v = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.



Odcinki

Odcinki domknięte $[a, b]$, otwarte (a, b) , lewostronnie domknięte i prawostronnie otwarte $[a, b)$, lewostronnie otwarte i prawostronnie domknięte $(a, b]$:

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x : a < x < b\},$$

$$[a, b) = \{x : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}.$$



Funkcje

Funkcja

$$f : X \rightarrow Y$$

Dziedzina X , zbiór wartości Y .

$$y = f(x),$$

$$x \in X, y \in Y.$$

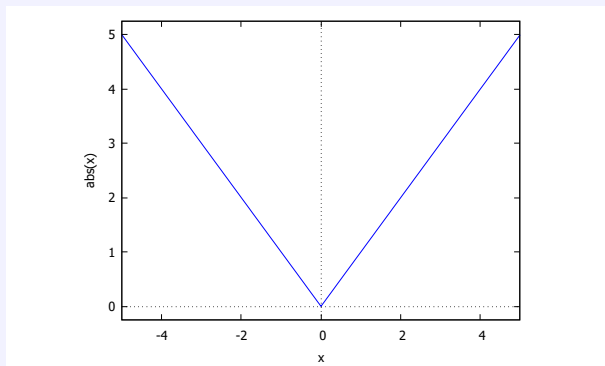


Funkcja określona wzorem

Ważny przykład – *wartość bezwzględna* czyli *moduł* z liczby x :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Oczywiście $|0| = 0$. Wykres:



Ciąg liczbowy

Funkcja której dziedziną jest $\mathbb{N}$, a zbiorem wartości jest $\mathbb{R}$.

Oznaczenie: a_n wartość funkcji dla argumentu n .



Ciąg liczbowy

Ciąg nieskończony – kolejnym liczbom naturalnym n (indeksom) przyporządkowane są liczby rzeczywiste a_n . Ciąg zapisujemy jako $(a_1, a_2, \dots)$ lub $\{a_n\}_1^\infty$. Symbol ∞ oznacza nieskończoność.

Przykład.

$a_n = c + (n - 1) d$ – ciąg arytmetyczny,

$a_n = cq^{n-1}$ – ciąg geometryczny.



Ciagi monotoniczne

Ciąg jest:



Ciągi monotoniczne

Ciąg jest:

- rosnący, gdy $a_i < a_{i+1}$,



Ciągi monotoniczne

Ciąg jest:

- rosnący, gdy $a_i < a_{i+1}$,
- malejący, gdy $a_i > a_{i+1}$,



Ciągi monotoniczne

Ciąg jest:

- rosnący, gdy $a_i < a_{i+1}$,
- malejący, gdy $a_i > a_{i+1}$,
- niemalejący, gdy $a_i \leq a_{i+1}$,



Ciągi monotoniczne

Ciąg jest:

- rosnący, gdy $a_i < a_{i+1}$,
- malejący, gdy $a_i > a_{i+1}$,
- niemalejący, gdy $a_i \leq a_{i+1}$,
- nierosnący, gdy $a_i \geq a_{i+1}$.



Ciągi monotoniczne

Ciąg jest:

- rosnący, gdy $a_i < a_{i+1}$,
- malejący, gdy $a_i > a_{i+1}$,
- niemalejący, gdy $a_i \leq a_{i+1}$,
- nierosnący, gdy $a_i \geq a_{i+1}$.

Ciąg jest ściśle monotoniczny, gdy jest rosnący lub malejący i jest monotoniczny (słabo monotoniczny), gdy jest niemalejący lub nierosnący.



Ciągi ograniczone

Ciąg jest ograniczony, gdy

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_n |a_n| < M.$$



Granica ciągu

Definicja

Liczba g jest granicą nieskończonego ciągu liczbowego $\{a_n\}$ przy $n \rightarrow \infty$:

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad a_n \rightarrow g,$$

gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_k \bigwedge_{n > k} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Ciąg jest zbieżny, gdy istnieje jego granica. Gdy granica nie istnieje, to ciąg jest rozbieżny.



Zbieżność do nieskończoności

Definicja

Ciąg a_n jest rozbieżny do nieskończoności $+\infty$, gdy

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_k \bigwedge_{n>k} a_n > M$$

Ciąg a_n jest rozbieżny do minus nieskończoności $-\infty$, gdy

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_k \bigwedge_{n>k} a_n < -M$$

Zamiast mówić, że ciąg jest „rozbieżny do nieskończoności (minus nieskończoności)” mówi się też, że jest „zbieżny do nieskończoności (minus nieskończoności)”. Wtedy też mówi się, że ciąg ma granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$.



Przykłady granic

Ciąg zbieżny.

$$a_n = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1,$$

gdyż przyjmując $k = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$, mamy $|a_n - 1| = 1/n < \varepsilon$ dla wszystkich $n > k$.

Część całkowita liczby

Symbol $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ oznacza część całkowitą z liczby x , a $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych.



Przykłady granic

Ciąg zbieżny.

$$a_n = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1,$$

gdyż przyjmując $k = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$, mamy $|a_n - 1| = 1/n < \varepsilon$ dla wszystkich $n > k$.

Część całkowita liczby

Symbol $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ oznacza część całkowitą z liczby x , a $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych.

Ciąg rozbieżny do nieskończoności.

$$a_n = \sqrt{n} \rightarrow \infty,$$

gdyż przyjmując $k = \lfloor M^2 \rfloor + 1$, mamy $a_n > M$ dla wszystkich $n > k$.



Funkcje *podłoga* i *sufit*

Funkcja podłoga (floor), to część całkowitą z liczby x :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Często dawniej używane oznaczenia części całkowitej:

$$E(x) = [x] = \lfloor x \rfloor.$$

E – entier (francuskie *całość*).



Funkcje *podłoga* i *sufit*

Funkcja podłoga (floor), to część całkowitą z liczby x :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Często dawniej używane oznaczenia części całkowitej:

$$E(x) = [x] = \lfloor x \rfloor.$$

E – entier (francuskie *całość*).

Funkcja sufit (ceil):

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}.$$



Funkcje *podłoga* i *sufit*

Funkcja podłoga (floor), to część całkowitą z liczby x :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Często dawniej używane oznaczenia części całkowitej:

$$E(x) = [x] = \lfloor x \rfloor.$$

E – entier (francuskie *całość*).

Funkcja sufit (ceil):

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}.$$

Przykład.

$$\lfloor 1.1 \rfloor = 1, \quad \lfloor -1.6 \rfloor = -2,$$

$$\lceil 1.1 \rceil = 2, \quad \lceil -1.6 \rceil = -1.$$



Ciąg rozbieżny

Ciąg

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

jest rozbieżny – nie ma granicy.

$$\left\{ -2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}.$$



Twierdzenie o granicach

Poniższe twierdzenia ułatwiają nam stwierdzenia, czy granice istnieją.



Twierdzenie o granicach

Poniższe twierdzenia ułatwiają nam stwierdzenia, czy granice istnieją.

Twierdzenie

Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.



Twierdzenie o granicach

Poniższe twierdzenia ułatwiają nam stwierdzenia, czy granice istnieją.

Twierdzenie

Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie

Ciąg zbieżny jest ograniczony.



Twierdzenie o granicach

Poniższe twierdzenia ułatwiają nam stwierdzenia, czy granice istnieją.

Twierdzenie

Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie

Ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie

Jeżeli $\{a_n\}$ zbieżny, to $\{|a_n|\}$ zbieżny.



Działania na granicach

Twierdzenie

Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, to



Działania na granicach

Twierdzenie

Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, to

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$



Działania na granicach

Twierdzenie

Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, to

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$



Działania na granicach

Twierdzenie

Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, to

- ❶ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$
- ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$
- ❸ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$



Działania na granicach

Twierdzenie

Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, to

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Jeśli ponadto } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \text{ to}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$



Działania na granicach

Twierdzenie

Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, to

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Jeśli ponadto } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \text{ to}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Przyjmując $c = -1$, z $\textcircled{1}$ i $\textcircled{2}$ wynika, że
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$



Zastosowanie działań na granicach

Niech

$$a_n = \frac{an + b}{cn + d}, \quad |c| + |d| > 0.$$

Jeśli $c > 0$, to

$$a_n = \frac{a + \frac{b}{n}}{c + \frac{d}{n}} \rightarrow \frac{a}{c}.$$

Jeśli $c = 0$, to

$$a_n = \frac{an + b}{d} \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{gdy } a > 0, \\ \frac{b}{d}, & \text{gdy } a = 0, \\ -\infty, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$



Inne własności granic

Uwaga

Zmiana skończonej liczby wyrazów ciągu nie wpływa ani na zbieżność, ani na jego granicę.



Inne własności granic

Uwaga

Zmiana skończonej liczby wyrazów ciągu nie wpływa ani na zbieżność, ani na jego granicę.

Twierdzenie

Jeśli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne oraz $a_n \leq b_n$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$



Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie to w wielu przypadkach ułatwia wyznaczenie granicy ciągu $\{b_n\}$, gdy znamy granice ciągów większego $\{c_n\}$ i mniejszego $\{a_n\}$.

Twierdzenie

Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g,$$

to również

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$



Przykład

Niech

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{1+n}}.$$

Ponieważ

$$0 < a_n < \frac{1}{n}$$

oraz

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

to również

$$a_n \rightarrow 0.$$



Często spotykane granice



Często spotykane granice

- $c > 0 \implies nc \rightarrow \infty,$



Często spotykane granice

- $c > 0 \implies nc \rightarrow \infty,$
- $a > 1 \implies a^n \rightarrow \infty,$



Często spotykane granice

- $c > 0 \implies nc \rightarrow \infty,$
- $a > 1 \implies a^n \rightarrow \infty,$
- $|q| < 1 \implies q^n \rightarrow 0,$



Często spotykane granice

- $c > 0 \implies nc \rightarrow \infty,$
- $a > 1 \implies a^n \rightarrow \infty,$
- $|q| < 1 \implies q^n \rightarrow 0,$
- $a > 0 \implies \sqrt[n]{a} \rightarrow 1,$



Często spotykane granice

- $c > 0 \implies nc \rightarrow \infty,$
- $a > 1 \implies a^n \rightarrow \infty,$
- $|q| < 1 \implies q^n \rightarrow 0,$
- $a > 0 \implies \sqrt[n]{a} \rightarrow 1,$
- $|q| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a(1 + q + \dots + q^{n-1}) = \frac{a}{1 - q}$
– szereg geometryczny.



Przykład

Niech

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

Ponieważ

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n},$$

oraz

$$\sqrt[n]{3^n} = 3,$$

$$\sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \rightarrow 3,$$

to również $a_n \rightarrow 3$.



Ciągi monotoniczne i ograniczone – liczba e

Twierdzenie

Ciąg ograniczony i monotoniczny jest zbieżny.

Ciąg

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest rosnący i ograniczony (uzasadnienie tego faktu pominiemy).
Z twierdzenia wynika, że ciąg jest zbieżny. Oznaczmy

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Również

$$\frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$



Liczba e c.d.

Liczba e jest niewymierna. Oznacza to, że nie można jej przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, czyli ułamka.

W przybliżeniu

$$e \approx 2.718281828459045.$$

Prawdziwy jest wzór znacznie bardziej ogólny:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

Wzór ten może służyć do przybliżonego obliczania wartości funkcji e^x .



Maxima po raz pierwszy

Polecenie programu *Maxima*:

```
(% i1) plot2d([exp(x)], [x,-2,2])$
```

Wykresy funkcji $e^x = \exp(x)$ i $e^{-x} = \exp(-x)$:

