

Matematyka II

Wykład 6

Proste równania różniczkowe

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2025/26



Pierwszy przykład

Niech

$$xy = y'$$

dla pewnej nieznanej funkcji $y = f(x)$.

Równanie to nazywa się równaniem różniczkowym.

Ponieważ nieznana funkcja jest jednej zmiennej, to równanie nazywa się równaniem różniczkowym zwyczajnym. Znajdowanie nieznanej funkcji nazywa się całkowaniem równania, a rozwiązanie y nazywa się całką równania różniczkowego.



Pierwszy przykład c.d.

Łatwo sprawdzić, że funkcja

$$y = Ce^{x^2/2},$$

spełnia równanie

$$xy = y'$$

dla dowolnej stałej C , bo

$$y' = C \left(\frac{x^2}{2} \right)' e^{x^2/2} = xCe^{x^2/2} = xy.$$



Pierwszy przykład c.d.

Łatwo sprawdzić, że funkcja

$$y = Ce^{x^2/2},$$

spełnia równanie

$$xy = y'$$

dla dowolnej stałej C , bo

$$y' = C \left(\frac{x^2}{2} \right)' e^{x^2/2} = xCe^{x^2/2} = xy.$$

Jak widać, otrzymano nie jedno, a rodzinę rozwiązań. Dla ustalonej stałej C , mamy jedno rozwiązanie, zwane rozwiązaniem szczególnym.

Rozwiązanie dla stałej dowolnej, nazywamy rozwiązaniem ogólnym.



Pierwszy przykład – Maxima

```
(%i1) ode2(x*y='diff(y,x), y, x);  
(%o1) y=%c*e^(x^2/2)
```

Rozwiązanie szczególne:

$$x = 1, y = 1 \implies c = 1/\sqrt{e}.$$

```
(%i2) ic1(ode2(x*y='diff(y,x), y, x), x=1, y=1);  
(%o2) y=%e^(x^2/2-1/2)
```

$$f(x) = e^{x^2/2} e^{-1/2} \quad f(1) = 1.$$

```
(%i3) f(x):=%e^(x^2/2-1/2);  
(%o3) f(x):=%e^(x^2/2-1/2)  
(%i4) f(1);  
(%o4) 1
```



Równania różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$f(x) dx = g(y) dy.$$



Równania różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$f(x) dx = g(y) dy.$$

Inna postać

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

lub

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$



Równania różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$f(x) dx = g(y) dy.$$

Inna postać

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

lub

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Rozwiązanie równania otrzymuje się przez scałkowanie stronami:

$$\int f(x) dx = \int g(y) dy.$$



Przykład (0)

Przykład najprostszy z możliwych:

$$y - y' = 0.$$

czyli

$$y = \frac{dy}{dx}.$$



Przykład (0)

Przykład najprostszy z możliwych:

$$y - y' = 0.$$

czyli

$$y = \frac{dy}{dx}.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$



Przykład (0)

Przykład najprostszy z możliwych:

$$y - y' = 0.$$

czyli

$$y = \frac{dy}{dx}.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$



Przykład (0)

Przykład najprostszy z możliwych:

$$y - y' = 0.$$

czyli

$$y = \frac{dy}{dx}.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

$$\ln y - \ln C = x$$



Przykład (0)

Przykład najprostszy z możliwych:

$$y - y' = 0.$$

czyli

$$y = \frac{dy}{dx}.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

$$\ln y - \ln C = x \text{ lub } \ln(y/C) = x,$$



Przykład (0)

Przykład najprostszy z możliwych:

$$y - y' = 0.$$

czyli

$$y = \frac{dy}{dx}.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

$$\ln y - \ln C = x \text{ lub } \ln(y/C) = x,$$

$$\frac{y}{C} = e^x$$



Przykład (0)

Przykład najprostszy z możliwych:

$$y - y' = 0.$$

czyli

$$y = \frac{dy}{dx}.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

$$\ln y - \ln C = x \text{ lub } \ln(y/C) = x,$$

$$\frac{y}{C} = e^x \text{ czyli } y = Ce^x.$$



Przykład (1)

Rozwiążmy równanie

$$xy = y'$$

Najpierw przekształcamy je do postaci:

$$\frac{dy}{y} = x dx.$$



Przykład (1)

Rozwiążmy równanie

$$xy = y'$$

Najpierw przekształcamy je do postaci:

$$\frac{dy}{y} = x dx.$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymujemy

$$\ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + C'.$$



Przykład (1)

Rozwiążmy równanie

$$xy = y'$$

Najpierw przekształcamy je do postaci:

$$\frac{dy}{y} = x dx.$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymujemy

$$\ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + C'.$$

Stałą C' wygodnie będzie zapisać jako logarytm innej stałej $C > 0$:
 $C' = \ln C$. Wtedy równanie można zapisać w postaci

$$\ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + \ln C$$



Przykład (1) c.d.

Dalej

$$\ln |y| = \ln \left(Ce^{x^2/2} \right), \quad C > 0$$

skąd otrzymujemy

$$y = Ce^{x^2/2}.$$



Przykład (1) c.d.

Dalej

$$\ln |y| = \ln \left(Ce^{x^2/2} \right), \quad C > 0$$

skąd otrzymujemy

$$y = Ce^{x^2/2}.$$

Stała C nie musi być już dodatnia, gdyż opuszczony został znak wartości bezwzględnej przy y . Może być również równa zero, gdyż wtedy $y = 0$ też jest rozwiązaniem tego równania.



Przykład (1) – sprawdzenie

Poprawność rozwiązania można sprawdzić różniczkując rozwiązanie

$$y = Ce^{x^2/2},$$

$$y' = Cxe^{x^2/2}$$



Przykład (1) – sprawdzenie

Poprawność rozwiązania można sprawdzić różniczkując rozwiązanie

$$y = Ce^{x^2/2},$$

$$y' = Cxe^{x^2/2}$$

i podstawiając y' i y do równania:

$$xy = y'.$$



Przykład (1) – sprawdzenie

Poprawność rozwiązania można sprawdzić różniczkując rozwiązanie

$$y = Ce^{x^2/2},$$

$$y' = Cxe^{x^2/2}$$

i podstawiając y' i y do równania:

$$xy = y'.$$

Dostajemy

$$xCe^{x^2/2} = Cxe^{x^2/2}.$$



Przykład (2)

$$y' = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Trzeba założyć, że

- 1 albo $x \geq 0$ i $y > 0$
- 2 albo $x \leq 0$ i $y < 0$.



Przykład (2) – rozwiązanie

Pierwszy przypadek: $x \geq 0$ i $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$



Przykład (2) – rozwiązanie

Pierwszy przypadek: $x \geq 0$ i $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y} dy = \sqrt{x} dx,$$



Przykład (2) – rozwiązanie

Pierwszy przypadek: $x \geq 0$ i $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y} dy = \sqrt{x} dx,$$

$$\int y^{1/2} dy = \int x^{1/2} dx.$$



Przykład (2) – rozwiązanie

Pierwszy przypadek: $x \geq 0$ i $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y} dy = \sqrt{x} dx,$$

$$\int y^{1/2} dy = \int x^{1/2} dx.$$

$$\frac{2y^{3/2}}{3} = \frac{2x^{3/2}}{3} + C' \implies y^{3/2} = x^{3/2} + C \implies y = \left(x^{3/2} + C\right)^{2/3}.$$



Przykład (2) – rozwiązanie c.d.

Drugi przypadek: $x \leq 0$ i $y < 0$.

Istnieje

$$\sqrt{\frac{-x}{-y}} = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}.$$

Ograniczymy się do przypadku pierwszego.

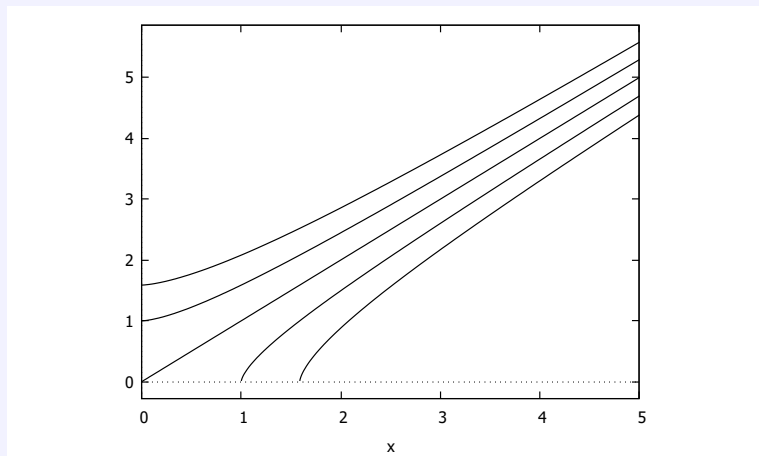
Maxima

`f(x,C):=if x>0 and (x^(3/2)+C)>0 then (x^(3/2)+C)^(2/3)`



Przykład (2) – wykresy rozwiązań

$$C = -2, -1, 0, 1, 2.$$



Przykład (2) – Maxima

```
(%i1) ode2('diff(y,x)=sqrt(x/y), y, x);  
(%o1) ((3*(x/y)^(3/2)*y^(3/2)  
-3*x*sqrt(x/y)*sqrt(y))*log(y)  
+(2-2*(x/y)^(3/2))*y^(3/2))/3=%c  
(%i2) radcan(%);  
(%o2) (2*y^(3/2)-2*x^(3/2))/3=%c
```



Definicja

Równanie różniczkowe postaci

$$y' + p(x)y = q(x),$$

nazywa się równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu. Równanie to jest liniowe, bo zarówno y jak i y' występują w pierwszej potęgze; jest pierwszego rzędu, bo występuje w nim tylko funkcja y i jej pierwsza pochodna.



Równanie jednorodne

Jeżeli $q(x) \equiv 0$, to równanie nazywa się równaniem liniowym jednorodnym:

$$y' + p(x)y = 0.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx.$$

Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, więc po obustronnym całkowaniu otrzymujemy

$$\ln y = - \int p(x) dx$$

skąd rozwiązanie jest postaci

$$y = \exp \left(- \int p(x) dx \right).$$

Jest rozwiązanie ogólne y_{oj} równania jednorodnego.

Stała C pojawi się po obliczeniu całki nieoznaczonej.



Przykład

Niech

$$y' - y = 0.$$

Przekształcamy to równanie do postaci

$$\frac{dy}{y} = x,$$

skąd

$$y = Ce^x$$



Rozwiązanie ogólne

Twierdzenie

Rozwiązanie ogólne y_{on} równania liniowego niejednorodnego

$$y' + p(x)y = q(x),$$

wyraża się wzorem

$$y_{on} = y_{oj} + y_{sn},$$

gdzie y_{oj} jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego,

$$y' + p(x)y = 0,$$

a y_{sn} jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego.



Rozwiązanie ogólne c.d.

Wynika stąd, że wystarczy rozwiązać równanie jednorodne, następnie „zgadnąć” dowolne rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego, a potem oba rozwiązania dodać.



Metoda przewidywań

Jeżeli $p(x) = \text{const}$, czyli równanie ma postać

$$y' + py = q(x),$$

to dla szczególnych postaci prawej strony $q(x)$, można przewidzieć postać rozwiązania szczególnego. Stąd nazwa „metoda przewidywań”.

Niektóre z tych szczególnych postaci dla których można przewidzieć postać rozwiązania, podane są w tabeli.



Przewidywane postacie rozwiązań

$q(x)$ – prawa strona równania	Rozwiązania
$W_n(x)$	$Q_n(x)$
$W_n(x)e^{\alpha x}$	$Q_n(x)e^{\alpha x}$, gdy $p \neq -\alpha$ $xQ_n(x)e^{\alpha x}$, gdy $p = -\alpha$
$ke^{\alpha x}$	$me^{\alpha x}$, gdy $p \neq -\alpha$ $xme^{\alpha x}$, gdy $p = -\alpha$
$k \cos(bx) + l \sin(bx)$	$m \cos(bx) + n \sin(bx)$
$e^{\alpha x}(k \cos(bx) + l \sin(bx))$	$e^{\alpha x}(m \cos(bx) + n \sin(bx))$
$W_n(x)(\cos(bx) + \sin(bx))$	$Q_n(x)(\cos(bx) + \sin(bx))$

$W_n(x), Q_n(x)_n$ – wielomiany stopnia n



Przykład (1)

Niech

$$y - y' = x^2 + 1.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Przykład (1)

Niech

$$y - y' = x^2 + 1.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = ax^2 + bx + c$.

Podstawiamy

$$ax^2 + bx + c - 2ax - b = x^2 + 1,$$

$$a = 1,$$

$$b - 2a = 0,$$

$$c - b = 1.$$



Przykład (1)

Niech

$$y - y' = x^2 + 1.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = ax^2 + bx + c$.

Podstawiamy

$$ax^2 + bx + c - 2ax - b = x^2 + 1,$$

$$a = 1,$$

$$b - 2a = 0,$$

$$c - b = 1.$$

Stąd $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$,



Przykład (1)

Niech

$$y - y' = x^2 + 1.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = ax^2 + bx + c$.

Podstawiamy

$$ax^2 + bx + c - 2ax - b = x^2 + 1,$$

$$a = 1,$$

$$b - 2a = 0,$$

$$c - b = 1.$$

Stąd $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$,

czyli

$$y_{on} = y_{oj} + y_{sn} = Ce^x + x^2 + 2x + 3.$$



Przykład (2)

Niech

$$y - y' = 3e^{-2x}.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.



Przykład (2)

Niech

$$y - y' = 3e^{-2x}.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = ae^{-2x}$.

Podstawiamy

$$ae^{-2x} - (-2ae^{-2x}) = 3e^{-2x},$$

skąd po skróceniu przez e^{-2x} otrzymujemy $a + 2a = 3$, a więc $a = 1$.



Przykład (2)

Niech

$$y - y' = 3e^{-2x}.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = ae^{-2x}$.

Podstawiamy

$$ae^{-2x} - (-2ae^{-2x}) = 3e^{-2x},$$

skąd po skróceniu przez e^{-2x} otrzymujemy $a + 2a = 3$, a więc $a = 1$.

Stąd

$$y_{on} = y_{oj} + y_{sn} = Ce^x + e^{-2x}.$$



Przykład (3)

Niech

$$y - y' = \sin 2x.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.



Przykład (3)

Niech

$$y - y' = \sin 2x.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = a \cos 2x + b \sin 2x$.

Podstawiamy

$$a \cos 2x + b \sin 2x + 2a \sin 2x - 2b \cos 2x = \sin 2x.$$

Wtedy

$$a - 2b = 0,$$

$$2a + b = 1.$$



Przykład (3)

Niech

$$y - y' = \sin 2x.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = a \cos 2x + b \sin 2x$.

Podstawiamy

$$a \cos 2x + b \sin 2x + 2a \sin 2x - 2b \cos 2x = \sin 2x.$$

Wtedy

$$a - 2b = 0,$$

$$2a + b = 1.$$

czyli

$$y_{on} = Ce^x + 0.2 \sin 2x + 0.4 \cos 2x.$$



Idea metody uzmienniania stałej

Gdy $q(x)$ nie jest stałą, stosuje się metodę zwaną „metodą uzmienniania stałej”.

Polega ona na tym, że w rozwiązaniu ogólnym równania jednorodnego y_{oj} , zastępuje się stałą C funkcją $C(x)$ i podstawia do równania niejednorodnego

$$y' + p(x)y = q(x),$$

skąd wyznacza się $C(x)$.



Przykład (1)

Niech

$$y - y' = 3e^{-2x}.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Przyjmijmy więc, że

$$y_{on} = C(x)e^x$$

i podstawimy do równania niejednorodnego.



Przykład (1) c.d.

Najpierw obliczamy

$$y'_{on} = C'(x) e^x + C(x) e^x,$$

skąd po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$C(x) e^x - C'(x) e^x - C(x) e^x = 3e^{-2x}$$

oraz

$$C'(x) = -3e^{-3x} \implies C(x) = e^{-3x} + C.$$

Stąd

$$y_{on} = (e^{-3x} + C) e^x = e^{-2x} + Ce^x.$$



Przykład (2)

Niech

$$y - y' = \sin 2x.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

$$y'_{on} = C(x) e^x - C'(x) e^x - C(x) e^x = -C'(x) e^x,$$

$$C(x) = -\frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) + C,$$

skąd

$$y_{on} = \left(-\frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) + C \right) e^x.$$



Przykład (3)

Niech

$$y' - xy = x.$$

Odpowiadającym temu równaniu równaniem jednorodnym jest

$$y' - xy = 0.$$

którego rozwiązaniem jest $y_{oj} = Ce^{x^2/2}$.

Przyjmiemy więc, że

$$y_{on} = C(x) e^{x^2/2}$$

i podstawimy do równania niejednorodnego.



Przykład (3) c.d.

Najpierw obliczamy

$$y'_{on} = C'(x) e^{x^2/2} + xC(x) e^{x^2/2}$$

skąd po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$C'(x) e^{x^2/2} + xC(x) e^{x^2/2} - xC(x) e^{x^2/2} = x.$$



Przykład (3) c.d.

Najpierw obliczamy

$$y'_{on} = C'(x) e^{x^2/2} + xC(x) e^{x^2/2}$$

skąd po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$C'(x) e^{x^2/2} + xC(x) e^{x^2/2} - xC(x) e^{x^2/2} = x.$$

Po skróceniu:

$$C'(x) = xe^{-x^2/2},$$

skąd

$$C(x) = \int xe^{-x^2} dx.$$



Przykład (3) c.d.

Najpierw obliczamy

$$y'_{on} = C'(x) e^{x^2/2} + xC(x) e^{x^2/2}$$

skąd po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$C'(x) e^{x^2/2} + xC(x) e^{x^2/2} - xC(x) e^{x^2/2} = x.$$

Po skróceniu:

$$C'(x) = xe^{-x^2/2},$$

skąd

$$C(x) = \int xe^{-x^2/2} dx.$$

Całkę tę obliczamy przez podstawienie: $C(x) = -e^{-x^2/2} + C$.

$$y_{on} = \left(C - e^{-x^2/2}\right) e^{x^2/2} = Ce^{x^2/2} - 1.$$



Przykład (3) – Maxima

$$y' - xy = x.$$

```
(%i1) ode2('diff(y,x)-x*y=x, y, x);  
(%o1) y=(%c-%e^(-x^2/2))*%e^(x^2/2)  
(%i2) factor(%);  
(%o2) y=%c*%e^(x^2/2)-1
```



Przykład (4)

$$y' + y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$



Przykład (4)

$$y' + y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

$$y_{oj} = Ce^{-x}$$



Przykład (4)

$$y' + y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

$$y_{oj} = Ce^{-x}$$

Uzmienniamy stałą:

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = \sqrt{x}$$

skąd

$$C'(x) = e^x \sqrt{x}.$$



Przykład (4)

$$y' + y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

$$y_{oj} = Ce^{-x}$$

Uzmienniamy stałą:

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = \sqrt{x}$$

skąd

$$C'(x) = e^x \sqrt{x}.$$

Całkujemy obustronnie:

$$C(x) = \int e^x \sqrt{x} dx = 2 \left(\frac{\sqrt{x} e^x}{2} + \frac{i\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(i\sqrt{x})}{4} \right)$$



Przykład (4) c.d.

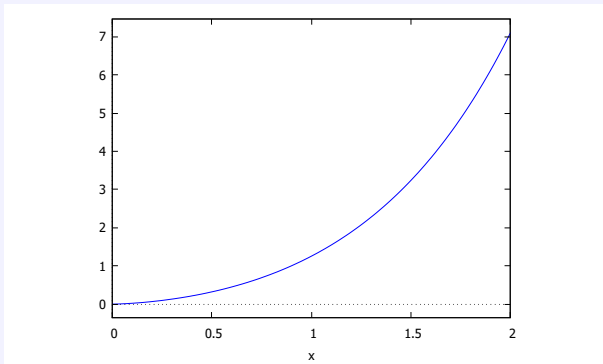
Ostatecznie:

$$y_{on} = C(x) e^{-x} = e^{-x} \int e^x \sqrt{x} dx = 2 \left(\frac{\sqrt{x} e^x}{2} + \frac{i\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(i\sqrt{x})}{4} \right)$$



Przykład (4) Uwaga!

Otrzymane $C(x)$ jest funkcją rzeczywistą!



Przykład (4) – Maxima

$$y' + y = \sqrt{x}.$$

```
(%i1) ode2('diff(y,x)+y=sqrt(x), y, x);  
(%o1) y=%e^(-x)*(2*((sqrt(x))*%e^x)/2  
+(sqrt(%pi))*%i*erf(%i*sqrt(x)))/4)+%c)
```

$$y = e^{-x} \left(2 \left(\frac{\sqrt{x}e^x}{2} + \frac{i\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(i\sqrt{x})}{4} \right) + C \right)$$



Przykład (4) – wykres

Wykres rozwiązania szczególnego dla $C = 1, 2, -1$: