

Matematyka II

Wykład 5

Całki: dalsze własności i zastosowania Funkcje wielu zmiennych

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2025/26



Definicja

Niech

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad x_k^* \in (x_{k-1}, x_k).$$

Zakładamy, że

$$\max(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0.$$



Definicja

Niech

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad x_k^* \in (x_{k-1}, x_k).$$

Zakładamy, że

$$\max(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k^*).$$

Jeśli prawa strona wzoru nie zależy od wyboru punktów x_k i x_k^* , to funkcja jest całkowna w sensie Riemanna.



Definicja

Niech

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad x_k^* \in (x_{k-1}, x_k).$$

Zakładamy, że

$$\max(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k^*).$$

Jeśli prawa strona wzoru nie zależy od wyboru punktów x_k i x_k^* , to funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna.

Jest to całka Riemanna.



Suma całkowa

Jeśli $\max(x_k - x_{k-1})$ jest dostatecznie małe, to

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k^*) \approx \int_a^b f(x) dx.$$



Suma całkowa

Jeśli $\max(x_k - x_{k-1})$ jest dostatecznie małe, to

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k^*) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

W przypadku punktów równoodległych mamy $h = (b - a) / n$, czyli

$$x_k = a + \frac{k}{n} (b - a)$$

Można też przyjąć $x_k^* = x_k - h/2$.



Przykład

Niech $f(x) = x^2$. Wartość dokładna całki

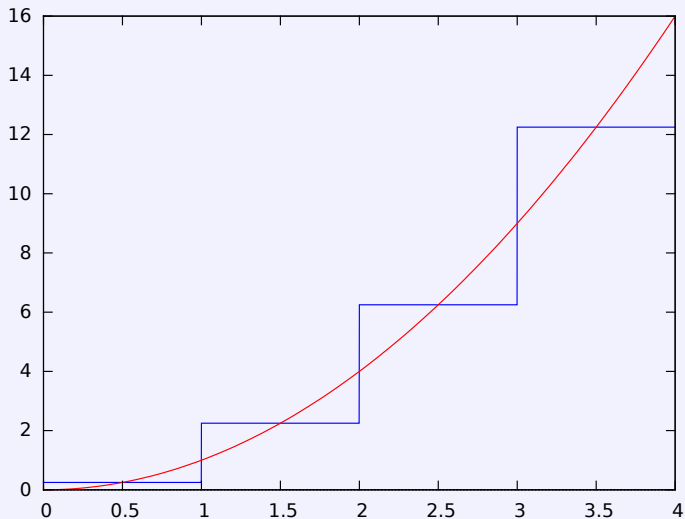
$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = 64/3 = 21.33\dots$$

Przybliżenie dla $n = 4$:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0.25 + 2.25 + 6.25 + 12.25 = 21.$$



Przykład c.d.



Twierdzenia o całce Riemanna

Twierdzenie

Jeśli funkcja ograniczona na przedziale domkniętym posiada w tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości, to jest w nim całkowna w sensie Riemanna.



Twierdzenia o całce Riemanna

Twierdzenie

Jeśli funkcja ograniczona na przedziale domkniętym posiada w tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości, to jest w nim całkowna w sensie Riemanna.

Twierdzenie

Jeśli funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym, to jest w tym przedziale całkowna w sensie Riemanna.



Funkcja pierwotna i całka Riemanna

Twierdzenie (Newtona–Leibniza)

Jeśli F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$, to wówczas

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$



Objętość bryły obrotowej

Krzywą, będącą wykresem funkcji $f(x) > 0$ w przedziale $[a, b]$ obracamy wokół osi OX .

„Plasterek” grubości Δx ma objętość

$$\Delta V \approx \pi f^2(x) \Delta x.$$



Objętość bryły obrotowej

Krzywą, będącą wykresem funkcji $f(x) > 0$ w przedziale $[a, b]$ obracamy wokół osi OX .

„Plasterek” grubości Δx ma objętość

$$\Delta V \approx \pi f^2(x) \Delta x.$$

Stąd

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Powierzchnia bryły obrotowej

Przy tych samych założeniach, powierzchnia „plasterka”, czyli powierzchnia stożka ściętego:

$$\Delta S \approx 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x.$$



Powierzchnia bryły obrotowej

Przy tych samych założeniach, powierzchnia „plasterka”, czyli powierzchnia stożka ściętego:

$$\Delta S \approx 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x.$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



Objętość i powierzchnia bryły obrotowej

Kalkulatory matematyczne



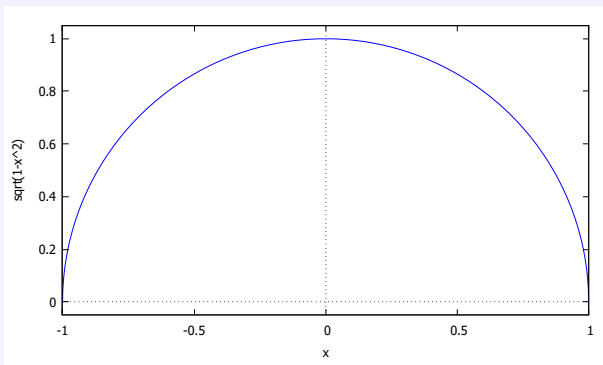
Objętość i powierzchnia bryły obrotowej

Kalkulatory matematyczne

Kalkulator objętości i powierzchni



Półokrąg



Objętość kuli

Niech $r = 1$.

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Obracamy $f(x)$ wokół osi OX .

Wtedy

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$



Objętość kuli

Niech $r = 1$.

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Obracamy $f(x)$ wokół osi OX .

Wtedy

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Ogólnie dla dowolnego r :

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3.$$



Powierzchnia kuli

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2} dx = 4\pi \int_0^1 dx = 4\pi.$$

Ogólnie dla dowolnego r :

$$S = 4\pi r^2.$$

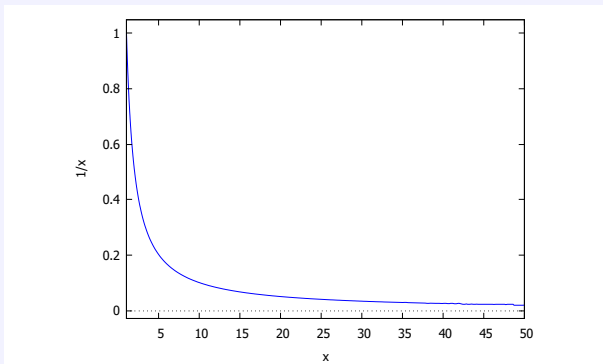


Nieskończony lejek (1)

Wykres funkcji

$$f(x) = 1/x.$$

od 1 do ∞ obracamy wokół osi OX .



Nieskończony lejek (2)

$$f(x) = 1/x, \quad 1 \leq x \leq \infty.$$



Nieskończony lejek (2)

$$f(x) = 1/x, \quad 1 \leq x \leq \infty.$$

Przekrój

$$P = 2 \int_1^{\infty} 1/x \, dx = \ln \Big|_1^{\infty} = \infty.$$



Nieskończony lejek (2)

$$f(x) = 1/x, \quad 1 \leq x \leq \infty.$$

Przekrój

$$P = 2 \int_1^{\infty} 1/x \, dx = \ln \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Objętość:

$$V = \pi \int_1^{\infty} 1/x^2 \, dx = -\pi/x \Big|_1^{\infty} = \pi.$$



Nieskończony lejek (2)

$$f(x) = 1/x, \quad 1 \leq x \leq \infty.$$

Przekrój

$$P = 2 \int_1^{\infty} 1/x \, dx = \ln \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Objętość:

$$V = \pi \int_1^{\infty} 1/x^2 \, dx = -\pi/x \Big|_1^{\infty} = \pi.$$

Powierzchnia boczna:

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} (1/x) \sqrt{1 + 1/x^2} \, dx \geq 2\pi \int_1^{\infty} 1/x \, dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty.$$



Powierzchnie i warstwy

Funkcja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jest funkcją rzeczywistą n zmiennych rzeczywistych, gdy

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ razy}}.$$



Powierzchnie i warstwy c.d.

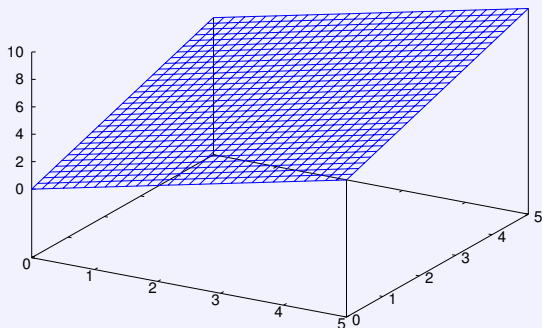
Dla przypadku $n = 2$, czyli dla funkcji dwóch zmiennych, zamiast (x_1, x_2) pisze się zwykle (x, y) i $f(x, y)$, a dla $n = 3$, czyli funkcji trzech zmiennych, zamiast (x_1, x_2, x_3) , pisze się zwykle (x, y, z) i $f(x, y, z)$.

Zauważmy, że \mathbb{R}^2 jest płaszczyzną, a więc wykresem każdej funkcji $f(x, y)$ jest powierzchnia w przestrzeni trójwymiarowej.



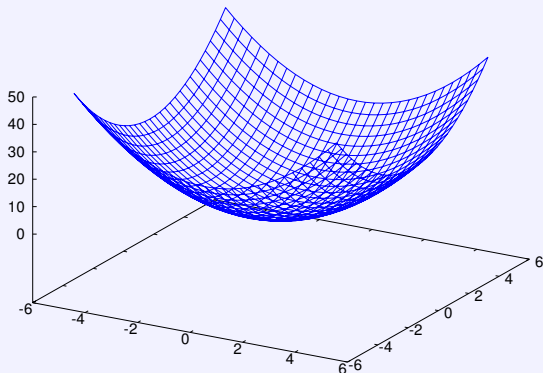
Płaszczyzna

Wykresem funkcji $z = x + y$ jest płaszczyzna.



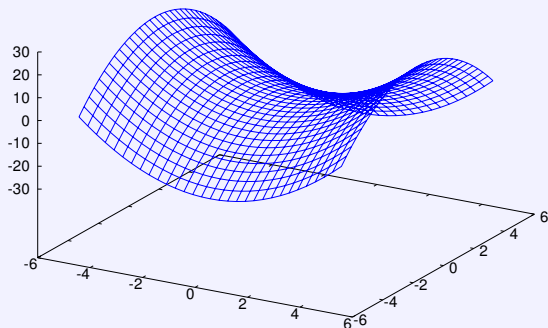
Paraboloida obrotowa

Wykresem funkcji $z = x^2 + y^2$ jest paraboloida obrotowa.

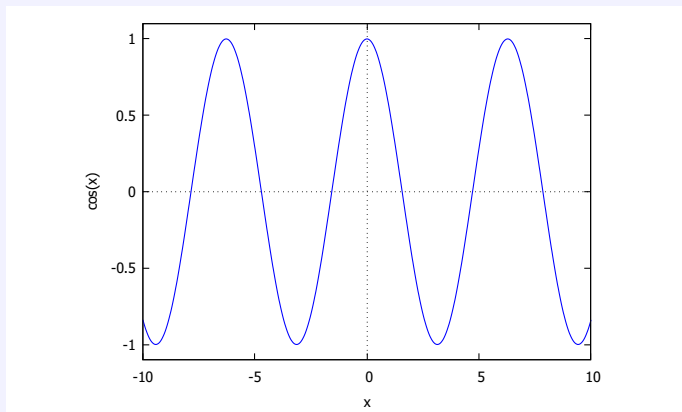


Hiperboloida jednopowłokowa

Wykresem funkcji $z = x^2 - y^2$ jest hiperboloida jednopowłokowa

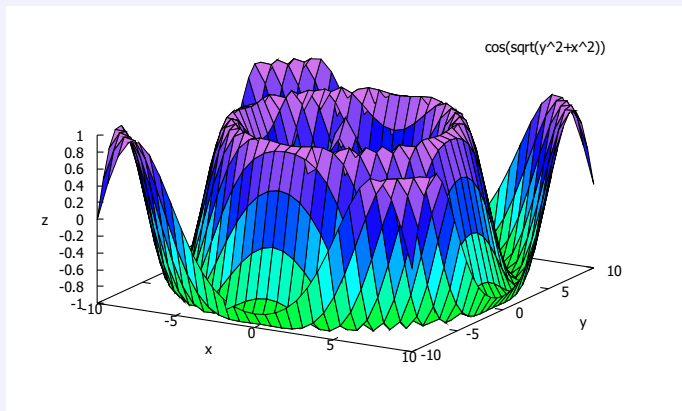


Powierzchnie obrotowe 1



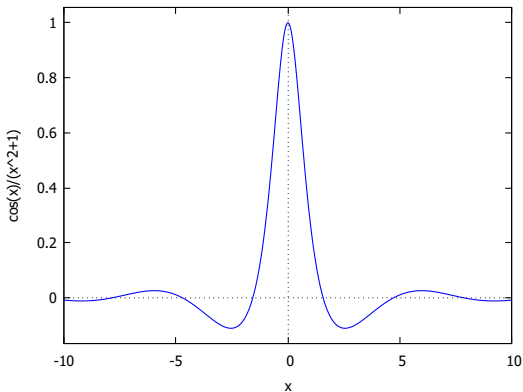
Powierzchnie obrotowe 1 c.d.

$$f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2}.$$



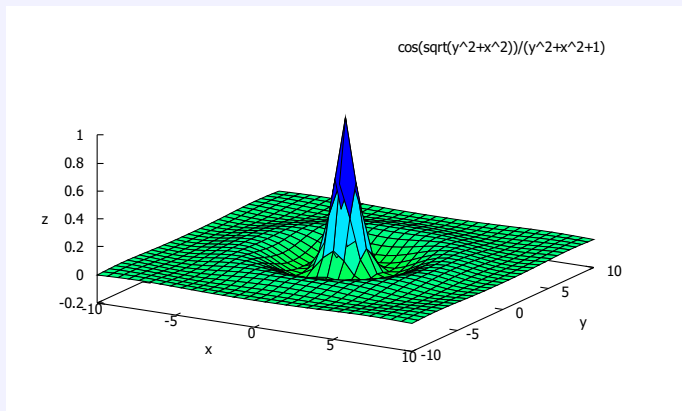
Powierzchnie obrotowe 2

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$$



Powierzchnie obrotowe 2 c.d.

$$f(x, y) = \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2}$$



Warstwica

Jeśli $z = f(x, y)$ i ustalimy wartość $z_0 = z$, to otrzymujemy równanie

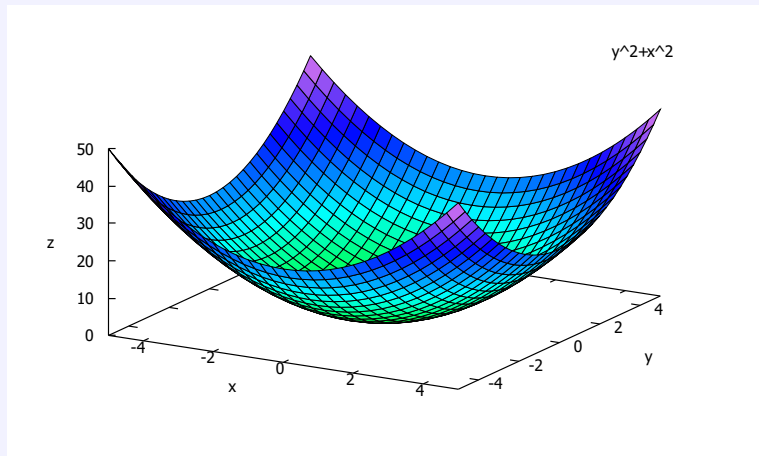
$$f(x, y) = z_0 = \text{const.}$$

Równanie to jest równaniem krzywej, zwanej warstwicą. Warstwica powstaje przez przecięcie wykresu funkcji (powierzchni) $f(x, y)$ płaszczyzną $z = z_0$.



Przykład warstwy (1)

Niech $f(x, y) = x^2 + y^2$, której wykres jest pokazany na rysunku.



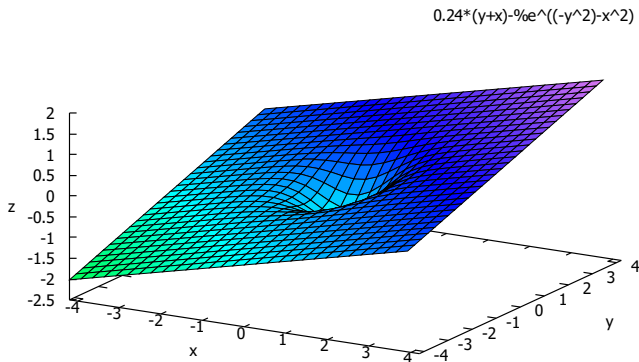
Przykład warstwiczy (1) c.d.

Jeśli przyjmiemy $z_0 = r^2$, to otrzymamy równanie $x^2 + y^2 = r^2$. Jest to równanie okręgu o promieniu r . Oznacza to, że warstwicze są okręgami. Jeżeli przyjmiemy $y = 0$, to wykres funkcji $z = f(x, 0) = x^2$ jest parabolą leżącą na płaszczyźnie OXZ , a jeśli $x = 0$, to wykres funkcji $z = f(0, y) = y^2$ jest parabolą leżącą na płaszczyźnie OYZ . Stąd nazwa *paraboloida obrotowa*.



Przykład warstwy (2)

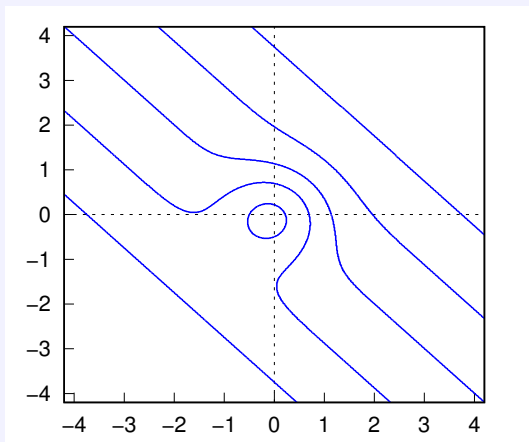
$$f(x, y) = 0.24(x + y) - \exp(-x^2 - y^2).$$



Przykład warstwy (2) c.d.

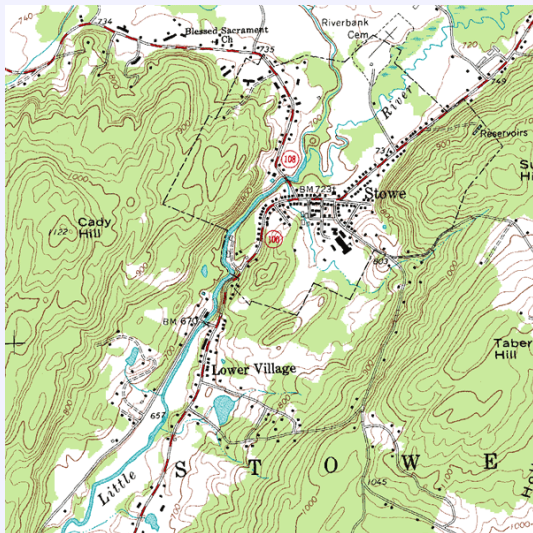
$$f(x, y) = 0.24(x + y) - \exp(-x^2 - y^2).$$

$$z = 0.90, 0.45, 0.00, -0.45, -0.90.$$



Poziomice

W geodezji,
kartografii itd.
[Wikipedia](#)



Pochodne cząstkowe

Niech $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ będzie określona w $D \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Pochodna cząstkowa po x w punkcie p_0 jest to granica ilorazu różnicowego, gdzie $p_0 = (x_0, y_0) \in D$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{p_0} = f_x(x_0, y_0) = f_x(p_0).$$

Analogicznie określa się pochodną cząstkową po y .



Przykład pochodnych cząstkowych

Jeśli $f(x, y) = e^{xy}$, to

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}.$$

Jeśli $f(x, y) = e^{x/y}$, to

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}e^{x/y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}e^{x/y}.$$



Definicja ekstremum

Funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$ maksimum, jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(p_0) \geq f(p)$ dla $\|p - p_0\| < \delta$,
 $p_0 \neq p = (x, y) \in D$, gdzie

$$\|p - p_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

jest odległością punktu p od punktu p_0 .



Warunek konieczny

Twierdzenie

Funkcja różniczkowalna w $D \subseteq \mathbb{R}^2$ może mieć ekstremum tylko w takim $p_0 \in D$, w którym

$$f_x(p_0) = 0 \text{ oraz } f_y(p_0) = 0.$$



Drugie pochodne cząstkowe

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – drugie pochodne mieszane.

Zwykle (ściśle warunki pominiemy), jest $f_{xy} = f_{yx}$.



Przykład drugich pochodnych cząstkowych

$$z = f(x, y) = \sin(x + y^2).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos(x + y^2).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x + y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cos(x + y^2) - 4y^2 \sin(x + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2y \sin(x + y^2).$$



Warunek dostateczny

Twierdzenie

Jeśli f ma drugie pochodne cząstkowe w D , w punkcie p_0 spełnia warunek konieczny oraz wyznacznik $w = w(p) > 0$:

$$w = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad f_{xy} = f_{yx},$$

to f ma w punkcie p_0

- maksimum, gdy $f_{xx}(p_0) < 0$,
- minimum, gdy $f_{xx}(p_0) > 0$.

Gdy $w(p_0) < 0$, to w p_0 nie ma ekstremum.



Przykład

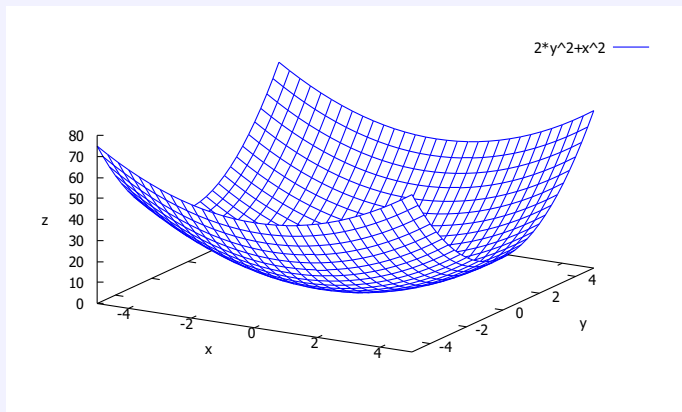
Niech $f(x, y) = x^2 + \lambda y^2$. Wtedy $f_x = 2x$, $f_y = 2\lambda y$. Drugie pochodne: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2\lambda$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$.

$$w = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda.$$

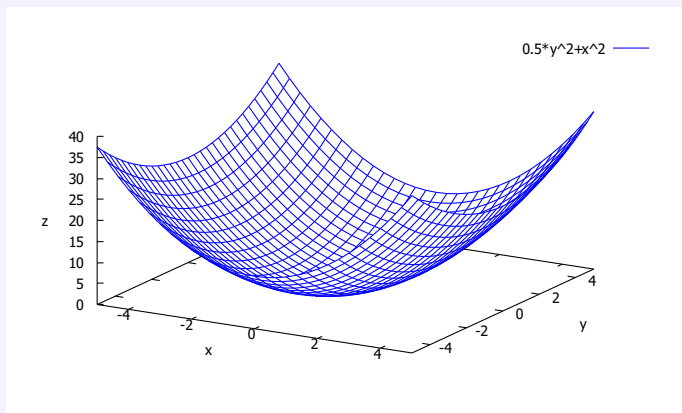
Ponieważ $f_{xx} = 2 > 0$, to dla $\lambda > 0$ jest minimum w punkcie $(0, 0)$, a dla $\lambda < 0$ nie ma ekstremum.



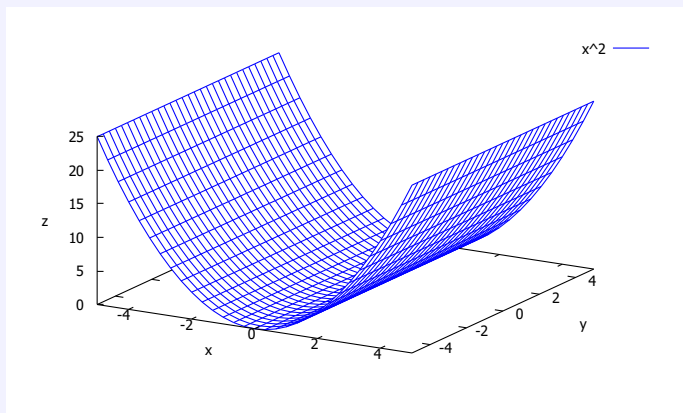
Przykład, $\lambda = 2$



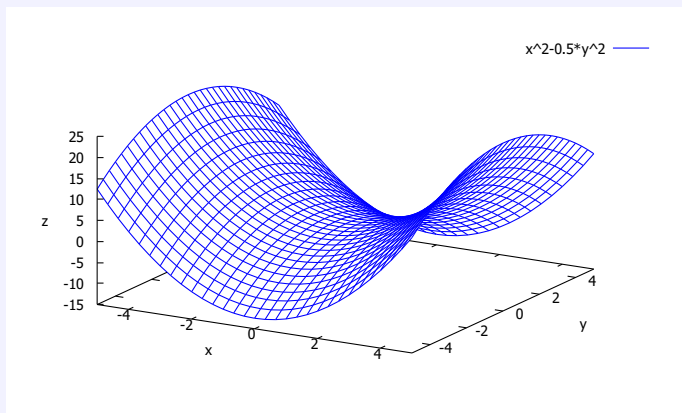
Przykład, $\lambda = 0.5$



Przykład, $\lambda = 0$



Przykład, $\lambda = -0.5$



Przykład, $\lambda = -2$

