

Matematyka II

Wykład 4

Całki niewłaściwe i szeregi

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2025/26



Definicja

Całka niewłaściwa w przedziale nieskończonym (a, ∞) funkcji $f(x)$ to granica:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

o ile ta granica istnieje.

Jeśli ta granica nie istnieje, to całka jest rozbieżna.



Definicja

Całka niewłaściwa w przedziale nieskończonym (a, ∞) funkcji $f(x)$ to granica:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

o ile ta granica istnieje.

Jeśli ta granica nie istnieje, to całka jest rozbieżna.

Jest to całka niewłaściwa pierwszego rodzaju.



Definicja c.d.

Niech a będzie dowolną liczbą, tzn. $-\infty < a < \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

o ile istnieją obie całki po prawej stronie równania.



Przykład (1)

$$\int_1^t x^{\alpha} dx = \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ \ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$



Przykład (1)

$$\int_1^t x^{\alpha} dx = \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ \ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$

Jeśli $\alpha < -1$, to

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} dx = \frac{-1}{\alpha + 1},$$

natomiast dla $\alpha \geq -1$ całka jest rozbieżna.



Przykład (1)

$$\int_1^t x^{\alpha} dx = \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ \ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$

Jeśli $\alpha < -1$, to

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} dx = \frac{-1}{\alpha + 1},$$

natomiast dla $\alpha \geq -1$ całka jest rozbieżna.

Przykład do przykładu (1):

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$



Przykład (2)

Niech $\lambda > 0$.

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$



Przykład (2)

Niech $\lambda > 0$.

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

[podstawienie $z = -\lambda x$, $dz = -\lambda dx$]



Przykład (2)

Niech $\lambda > 0$.

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

[podstawienie $z = -\lambda x$, $dz = -\lambda dx$]

$$= - \int_0^{-\lambda t} e^z dz = -e^z \Big|_0^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t} + 1 \rightarrow 1,$$

dla $t \rightarrow \infty$.



Przykład (2)

Niech $\lambda > 0$.

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

[podstawienie $z = -\lambda x$, $dz = -\lambda dx$]

$$= - \int_0^{-\lambda t} e^z dz = -e^z \Big|_0^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t} + 1 \rightarrow 1,$$

dla $t \rightarrow \infty$.

Wniosek: dla dowolnego $\lambda > 0$

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1.$$



Przykład (3)

Niech $\lambda > 0$. Obliczamy

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx.$$



Przykład (3)

Niech $\lambda > 0$. Obliczamy

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Przez części

$$\begin{aligned} \int x \lambda e^{-\lambda x} dx &= \int x \left(-e^{-\lambda x} \right)' dx = -x e^{-\lambda x} - \int x' \left(-e^{-\lambda x} \right) dx \\ &= -x e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + c. \end{aligned}$$



Przykład (3)

Niech $\lambda > 0$. Obliczamy

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Przez części

$$\begin{aligned} \int x \lambda e^{-\lambda x} dx &= \int x \left(-e^{-\lambda x} \right)' dx = -x e^{-\lambda x} - \int x' \left(-e^{-\lambda x} \right) dx \\ &= -x e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + c. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$



Przykład (4)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$



Przykład (4)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

Wiadomo (wykład 2), że

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$



Przykład (4)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

Wiadomo (wykład 2), że

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

Stąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0.$$



Przykład (5)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$



Przykład (5)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Ponieważ całka nieoznaczona

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$$

to

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$



Przykład (5)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Ponieważ całka nieoznaczona

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$$

to

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Wniosek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$



Przykład (6)

Próbujemy obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \, dx}{1+x^2}.$$



Przykład (6)

Próbujemy obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \, dx}{1+x^2}.$$

Całka nieoznaczona

$$\int \frac{2x \, dx}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + c.$$



Przykład (6)

Próbujemy obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \, dx}{1+x^2}.$$

Całka nieoznaczona

$$\int \frac{2x \, dx}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + c.$$

Co prawda

$$\int_{-t}^t \frac{2x \, dx}{1+x^2} = \ln(1+x^2) \Big|_{-t}^t = \ln(1+t^2) - \ln(1+t^2) = 0.$$



Przykład (6) c.d.

Nie istnieją jednakże całki (są rozbieżne)

$$\int_0^{\infty} \frac{2x \, dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{2x \, dx}{1+x^2}.$$

bo $\ln(1+t^2) \rightarrow \infty$ dla $t \rightarrow \pm\infty$.



Przykład (6) c.d.

Nie istnieją jednakże całki (są rozbieżne)

$$\int_0^{\infty} \frac{2x \, dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{2x \, dx}{1+x^2}.$$

bo $\ln(1+t^2) \rightarrow \infty$ dla $t \rightarrow \pm\infty$.

Wniosek: całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \, dx}{1+x^2}.$$

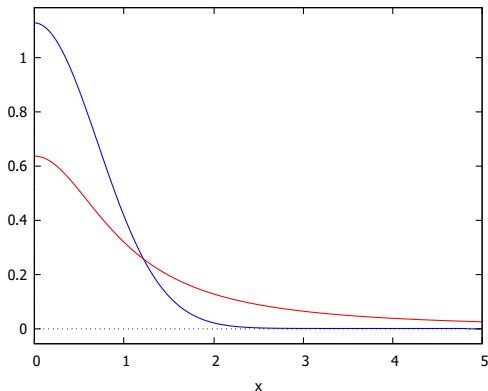
nie istnieje (jest rozbieżna).



Przykład porównawczy rysunkowy (1)

$$f_1(x) = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{niebieski,}$$

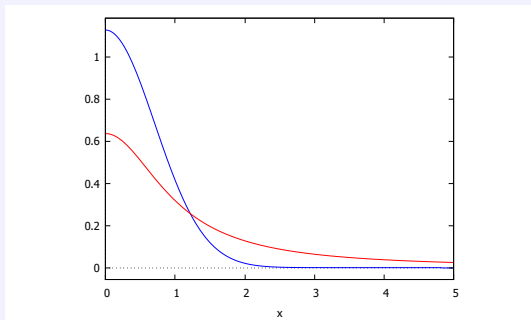
$$g_1(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, \quad \text{czerwony.}$$



Przykład porównawczy rysunkowy (2)

$$\int_0^{\infty} f_1(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx = 1$$

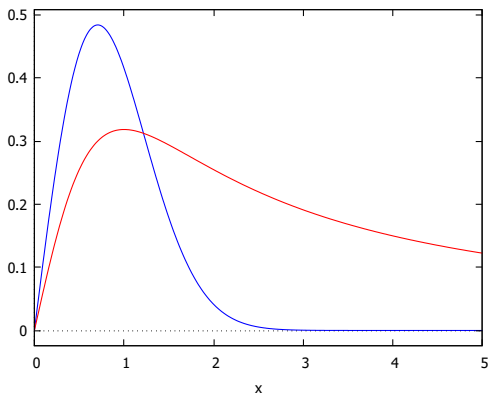
$$\int_0^{\infty} g_1(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi(1+x^2)} dx = 1$$



Przykład porównawczy rysunkowy (3)

$$f_2(x) = \frac{x^2 e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{niebieski,}$$

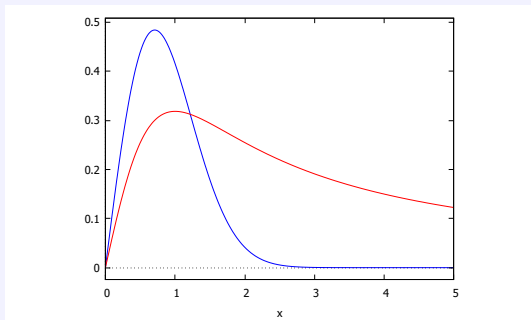
$$g_2(x) = \frac{2x}{\pi(1+x^2)}, \quad \text{czerwony.}$$



Przykład porównawczy rysunkowy (4)

$$\int_0^{\infty} f_2(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

$$\int_0^{\infty} g_2(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{2x}{\pi(1+x^2)} dx \quad \text{rozbieżna!}.$$



Definicja

Założmy, że $|f(x)| < M$ określona jest w przedziale $[a, t)$, $t < b$, dla pewnego M , czyli jest w tym przedziale skończona oraz że istnieje całka

$$\int_a^t f(x) dx.$$

Założmy dalej, że

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty.$$



Definicja c.d.

Całka niewłaściwa w przedziale $[a, b)$ to granica

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x) dx$$

o ile ta granica istnieje.

Jeśli ta granica nie istnieje, to całka jest rozbieżna.



Definicja c.d.

Całka niewłaściwa w przedziale $[a, b)$ to granica

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x) dx$$

o ile ta granica istnieje.

Jeśli ta granica nie istnieje, to całka jest rozbieżna.

Analogicznie definiuje się całkę, gdy $|f(x)| < M$ określona jest w przedziale $(t, b]$, $t > a$, dla pewnego M , czyli jest w tym przedziale skończona oraz że istnieje całka

$$\int_t^b f(x) dx,$$

gdzie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.



Przykład (1)

$$\int_t^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1 - t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ -\ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$



Przykład (1)

$$\int_t^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1 - t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ -\ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$

Jeśli $\alpha > -1$, to

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1},$$

natomiast dla $\alpha \leq -1$ całka jest rozbieżna.



Przykład (2)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty.$$

Całka

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$$

jest rozbieżna, bo

$$\int_0^t \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| \Big|_0^t = \ln \cos t$$

bo $\ln \cos t \rightarrow -\infty$ dla $t \rightarrow \pi/2$.



Obliczenie przez rozwinięcie w szereg

Chcemy obliczyć całkę

$$\int_a^b f(x) dx,$$

ale funkcja pierwotna do $f(x)$ nie jest elementarna albo jest trudna do obliczenia.



Obliczenie przez rozwinięcie w szereg

Chcemy obliczyć całkę

$$\int_a^b f(x) dx,$$

ale funkcja pierwotna do $f(x)$ nie jest elementarna albo jest trudna do obliczenia.

Można ją rozwinąć w szereg Maclaurina w przedziale $(-r, r)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$



Obliczenie przez rozwinięcie w szereg c.d.

Wtedy

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).\end{aligned}$$



Przykład (1a)

Bardzo ważna całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516.$$



Przykład (1a)

Bardzo ważna całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$



Przykład (1a)

Bardzo ważna całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$



Przykład (1a)

Bardzo ważna całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \dots$$



Przykład (1b)

Całkujemy wyraz po wyrazie:

$$\int \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) n!}.$$



Przykład (1b)

Całkujemy wyraz po wyrazie:

$$\int \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) n!}.$$

$$\int_0^t \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1) n!}.$$



Przykład (1c)

Dla dostatecznie dużych $t = T$ i dostatecznie dużych $n = N$ otrzymamy

$$\int_0^T e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n T^{2n+1}}{(2n+1) n!} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Wg Wolfram Alpha:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 0.8862269254527579.$$



Przykład (1c)

Dla dostatecznie dużych $t = T$ i dostatecznie dużych $n = N$ otrzymamy

$$\int_0^T e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n T^{2n+1}}{(2n+1) n!} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Wg Wolfram Alpha:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 0.8862269254527579.$$

Jeśli $T = 4.0$ oraz $N = 50$ otrzymujemy

$$\int_0^T e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n T^{2n+1}}{(2n+1) n!} = 0.8862274057635077 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



Przykład (2a)

Obliczmy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$



Przykład (2a)

Obliczmy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Czy ta całka jest zbieżna?



Przykład (2a)

Obliczmy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

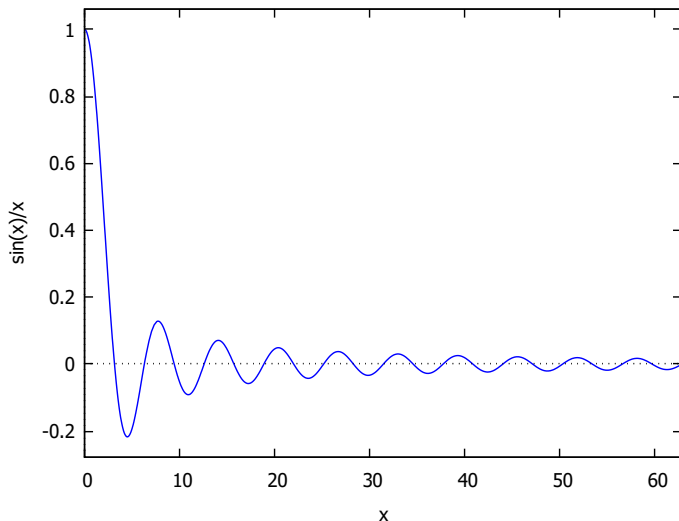
Czy ta całka jest zbieżna?

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

jest szeregiem naprzemiennym o wyrazach dążących do zera.



Przykład (2b)



Przykład (2c)

Ponieważ

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

to

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$



Przykład (2c)

Ponieważ

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

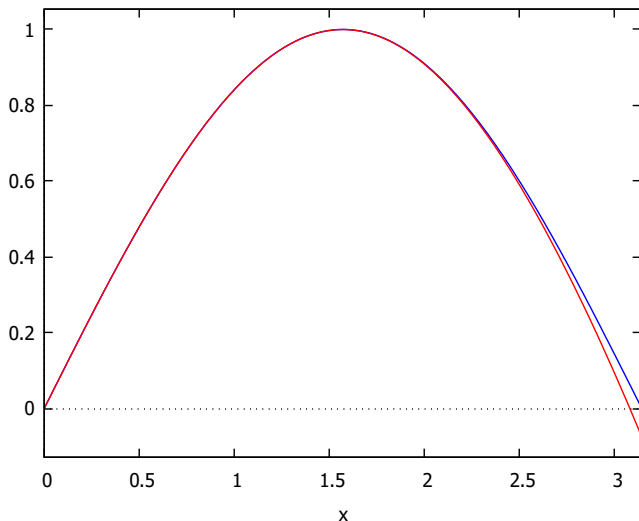
to

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

Złe przybliżenie dla $x > \pi$.



Przykład (2d)



Przykład (2e)

Ponieważ

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i+1)!}$$

to

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}$$



Przykład (2e)

Ponieważ

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i+1)!}$$

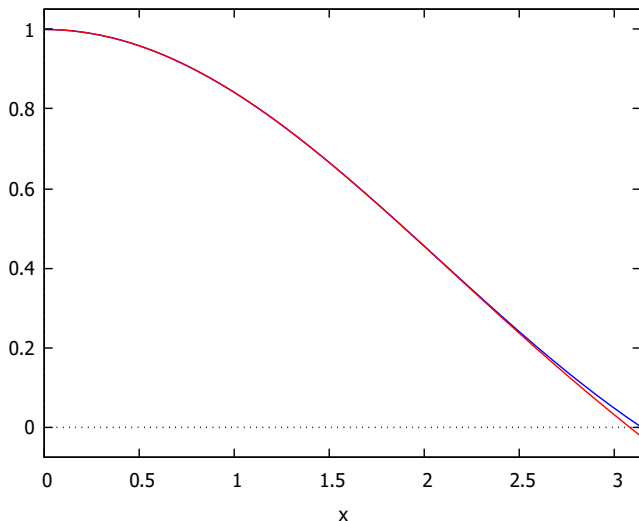
to

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}$$

Złe przybliżenie dla $x > \pi$.



Przykład (2f)



Przykład (2g)

Całkujemy:

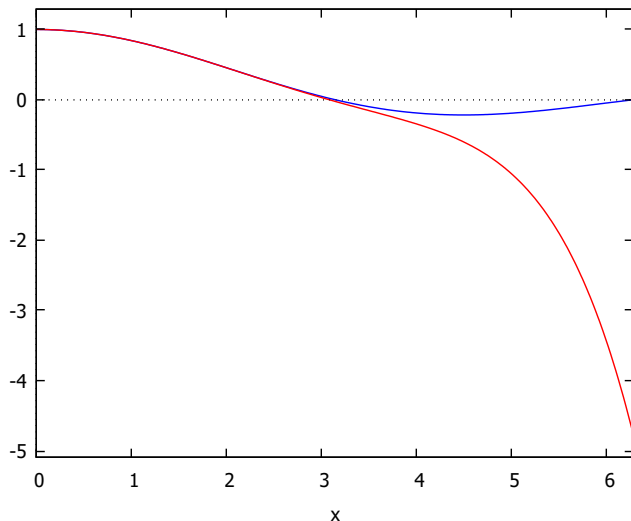
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i+1)!} dx$$

Błąd!

Dla kolejnych przedziałów $[k\pi, (k+1)\pi]$ muszą być kolejne rozwinięcia w szereg Taylora.



Przykład (2h)



Kryterium całkowe

Niech $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – funkcja dodatnia i malejąca, $a_n = f(n)$.

Twierdzenie (Maclaurina-Cauchy'ego)

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$



Przykład (1)

Szereg harmoniczny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

jest zbieżny dla $s > 1$, bo wtedy całka

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \int_1^{\infty} x^{-s} dx = \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_1^{\infty} = -\frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1}$$

jest zbieżna.



Przykład (2)

Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^s}$$

jest zbieżny dla $s > 1$, bo wtedy całka

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x (\ln x)^s} dx$$

jest zbieżna.



Przykład (2)

Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^s}$$

jest zbieżny dla $s > 1$, bo wtedy całka

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x (\ln x)^s} dx$$

jest zbieżna.

Całkę tę obliczamy przez podstawienie

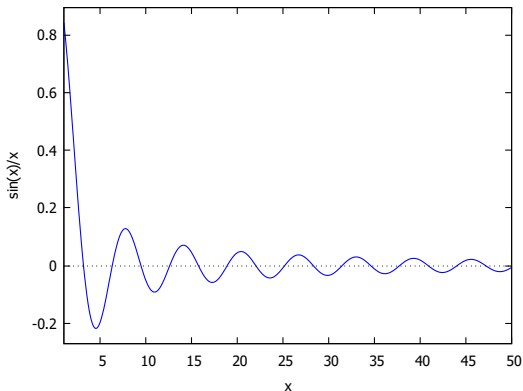
$$t = \ln x, \quad dt = \frac{dx}{x}$$

– zadanie na ćwiczenia.



Przykład – trudne do policzenia (1)

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \geq 1$$



Przykład – trudne do policzenia (2)

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.624713.$$

```
(%i1) plot2d([sin(x)/x], [x,1,50])$  
(%i2) integrate(sin(x)/x, x, 1, inf);  
(%o2) (%i*gamma_incomplete(0,%i))/2  
      -(%i*gamma_incomplete(0,-%i))/2  
(%i3) float(%), numer;  
(%o3) 0.5*(-0.6247132564277136*%i  
      -0.3374039229009682)*%i  
      -0.5*(0.6247132564277136*%i  
      -0.3374039229009682)*%i
```



Przykład – trudne do policzenia (3)

```
(%i4) gfactor(%);  
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5  
rat: replaced -0.3374039229009682 by -38170937/113131278  
= -0.3374039229009682  
rat: replaced -0.6247132564277136 by -31660927/50680735  
= -0.6247132564277136  
rat: replaced -0.5 by -1/2 = -0.5  
rat: replaced -0.3374039229009682 by -38170937/113131278  
= -0.3374039229009682  
rat: replaced 0.6247132564277136 by 31660927/50680735  
= 0.6247132564277136  
(%o4) 31660927/50680735  
(%i5) %,numer;  
(%o5) 0.6247132564277136
```



Przykład – trudne do policzenia (4)

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} (\pi - 2 \operatorname{Si}(1)) \approx 0.624713,$$

gdzie

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

to sinus całkowy.

Wolfram Alpha



Przykład – trudne do policzenia (5)

Ponieważ (patrz np. *Maxima*)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

to dla obliczenia

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

wystarczy znać

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \text{Si}(a).$$



Przykład – trudne do policzenia (6)

$$a_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x} dx =$$

1.85190

−0.43379

0.25661

−0.18260

0.14180

−0.11593

0.09805

−0.08495

0.07495

−0.06705

dla $k = 1, 2, \dots, 10$.

Przykład – trudne do policzenia (6)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Szereg jest zbieżny, bo $|a_k|$ jest ciągiem malejącym, zbieżnym do zera, natomiast a_k ma znaki naprzemienne $+$ i $-$ (kryterium Leibniza).

