

Matematyka II

Wykład 3 Całki oznaczone

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2025/26



Definicja całki oznaczonej

Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ w granicach od a do b jest liczbą określoną wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$.



Definicja całki oznaczonej

Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ w granicach od a do b jest liczbą określoną wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$.
Liczba a nazywa się dolną, a liczba b – górną granicą całkowania.



Definicja całki oznaczonej

Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ w granicach od a do b jest liczbą określoną wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$.
Liczba a nazywa się dolną, a liczba b – górną granicą całkowania.
Przyjmuje się wygodne oznaczenie:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$



Całka nieoznaczona i oznaczona

Zasadnicza różnica między całką nieoznaczoną a oznaczoną:

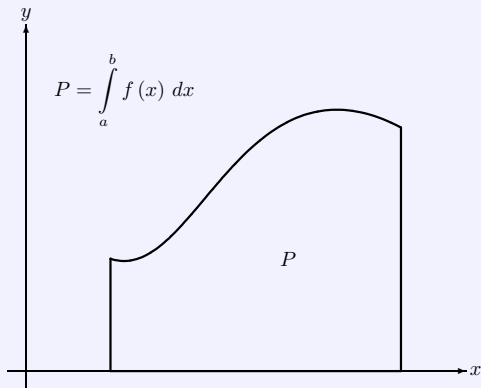
Uwaga

- Całka nieoznaczona jest funkcją.
- Całka oznaczona jest liczbą.



Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Jeśli $a < b$ i $f(x) > 0$, to $\int_a^b f(x) dx$ jest polem P pod wykresem funkcji $f(x)$ nad osią OX , pomiędzy prostymi prostopadłymi do tej osi, wystawionymi w punktach a i b .



Interpretacja geometryczna całki oznaczonej c.d.

Jeśli $a < b$ i $f(x) < 0$, to $\int_a^b f(x) dx$ jest minus polem P nad wykresem funkcji $f(x)$ pod osią OX , pomiędzy prostymi prostopadłymi do tej osi, wystawionymi w punktach a i b .



Interpretacja geometryczna całki oznaczonej c.d.

Jeśli $a < b$ i $f(x) < 0$, to $\int_a^b f(x) dx$ jest minus polem P nad wykresem funkcji $f(x)$ pod osią OX , pomiędzy prostymi prostopadłymi do tej osi, wystawionymi w punktach a i b .

$$P = - \int_a^b f(x) dx$$



Najprostszy przykład

$$\int_0^1 x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

– pole trójkąta,



Najprostszy przykład

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

– pole trójkąta,

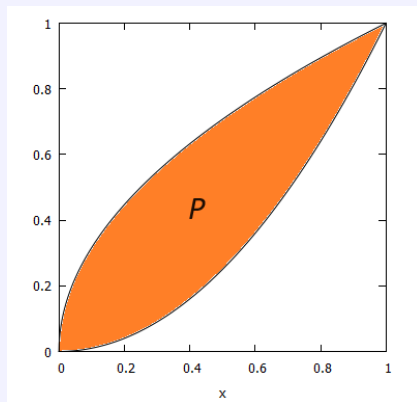
$$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

– pole wykresem wielomianu x^n .



Obliczanie pola (1)

Pole ograniczone krzywymi o równaniach $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.

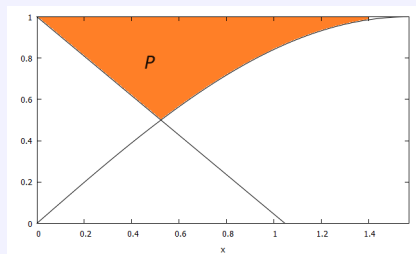


$$P = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Obliczanie pola (2)

Pole ograniczone krzywymi o równaniach $y = \sin x$, $y = 1 - 3x/\pi$, $y = 1$.



$$P = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi) dx - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx.$$



Obliczanie pola (2) c.d.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi) dx &= x \Big|_0^{\pi/6} - \frac{3}{2\pi} x^2 \Big|_0^{\pi/6} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2\pi} \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$



Obliczanie pola (2) c.d.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi) dx &= x \Big|_0^{\pi/6} - \frac{3}{2\pi} x^2 \Big|_0^{\pi/6} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2\pi} \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Obliczanie pola (2) c.d.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi) dx &= x \Big|_0^{\pi/6} - \frac{3}{2\pi} x^2 \Big|_0^{\pi/6} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2\pi} \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$P = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.3120718413117338.$$



Obliczanie pola (2) – uwaga

Pierwsza całka czysto geometrycznie:

$$\int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi) dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8}.$$



Wartość średnia całkowa

Twierdzenie

Jeśli f jest funkcją ciągłą, to istnieje $c \in [a, b]$ takie, że

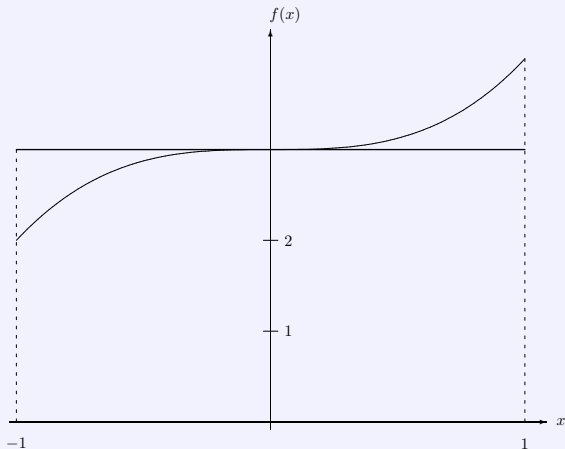
$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c).$$

Wartość $f(c) = f_{sr}$ występująca w twierdzeniu nazywa się średnią całkową.

Jest to dla funkcji $f(x) \geq 0$ wysokość prostokąta o podstawie długości $b - a$ i polu równym polu pod wykresem funkcji $f(x)$.



Wartość średnia całkowa – ilustracja



Całka oznaczona i funkcja pierwotna

Funkcja $g(x)$ określona za pomocą całki oznaczonej:

$$g(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau = F(x) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest pewną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.



Całka oznaczona i funkcja pierwotna

Funkcja $g(x)$ określona za pomocą całki oznaczonej:

$$g(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau = F(x) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest pewną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Wniosek:

$$F(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau.$$



Całka oznaczona i funkcja pierwotna

Funkcja $g(x)$ określona za pomocą całki oznaczonej:

$$g(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau = F(x) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest pewną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Wniosek:

$$F(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau.$$

Można więc przyjąć, że $c = -F(a)$.



Warunek początkowy

Jeśli

$$g(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx,$$

to

$$g(t_0) = 0.$$



Warunek początkowy

Jeśli

$$g(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx,$$

to

$$g(t_0) = 0.$$

Jeśli t jest czasem, to warunek $g(t_0)$ jest warunkiem początkowym – zaczynamy w chwili t_0 .

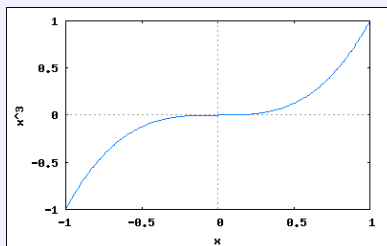
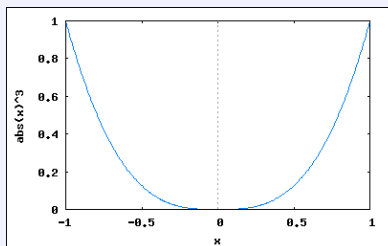


Funkcje parzyste i nieparzyste

Definicja

Funkcja f jest parzysta, gdy $f(x) = f(-x)$.

Funkcja f jest nieparzysta, gdy $f(x) = -f(-x)$.



Całki funkcji parzystych i nieparzystych.

Twierdzenie

Jeśli f jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Jeśli f jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$



Suma i mnożenie przez stałą

Podobnie jak dla całki nieoznaczonej

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$



Suma i mnożenie przez stałą

Podobnie jak dla całki nieoznaczonej

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Ostrzeżenie!

Nie istnieje wzór na całkę iloczynu funkcji.



Podział przedziału całkowania

Specyficzne dla całek oznaczonych jest natomiast

Twierdzenie

Jeśli $a < b < c$, to

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$



Droga, prędkość, przyspieszenie (1)

Oznaczenia:

- t – czas,
- $s(t)$ – droga,
- $v(t)$ – prędkość,
- $a(t)$ – przyspieszenie.



Droga, prędkość, przyspieszenie (1)

Oznaczenia:

- t – czas,
- $s(t)$ – droga,
- $v(t)$ – prędkość,
- $a(t)$ – przyspieszenie.

Wiadomo, że

- $v(t) = s'(t)$,
- $a(t) = v'(t)$,

o ile odpowiednie pochodne istnieją.



Droga, prędkość, przyspieszenie (2)

Wnioski:

$$v(t) = \int a(t) dx + c,$$

$$s(t) = \int v(t) dx + c,$$

z dokładnością do stałej.



Droga, prędkość, przyspieszenie (2)

Wnioski:

$$v(t) = \int a(t) dx + c,$$

$$s(t) = \int v(t) dx + c,$$

z dokładnością do stałej.

Stałą c trzeba wyznaczyć jako prędkość początkową i drogę początkową.



Droga, prędkość, przyspieszenie – przykład (1)

Założmy, że dla $t \geq 0$:

$$a(t) = e^{-t} + 0.1 \sin(20\pi t).$$

Wtedy prędkość, $v(0) = 0$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t (e^{-\tau} + 0.1 \sin(20\pi\tau)) d\tau \\ &= -e^{-\tau} - \frac{0.01}{20\pi} \cos(20\pi\tau) \Big|_0^t \\ &= -e^{-t} - \frac{0.005}{\pi} \cos(20\pi t) + 1 - \frac{0.005}{\pi}. \end{aligned}$$

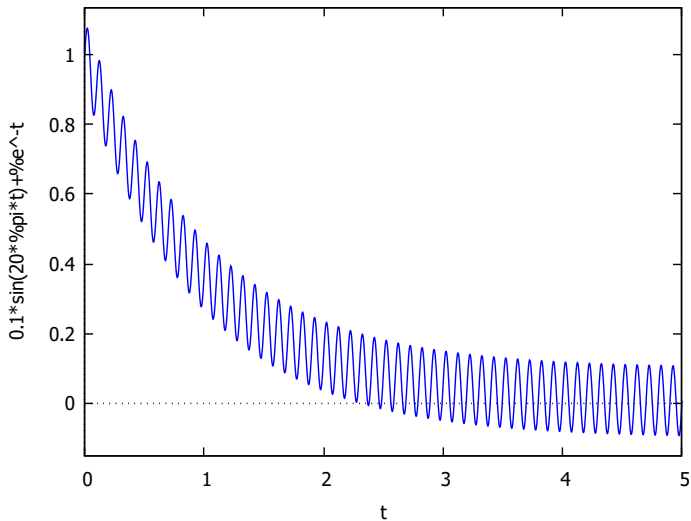


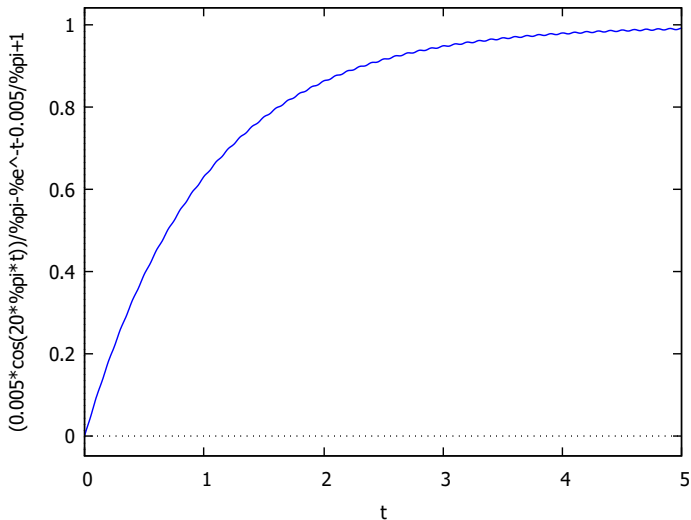
Droga, prędkość, przyspieszenie – przykład (2)

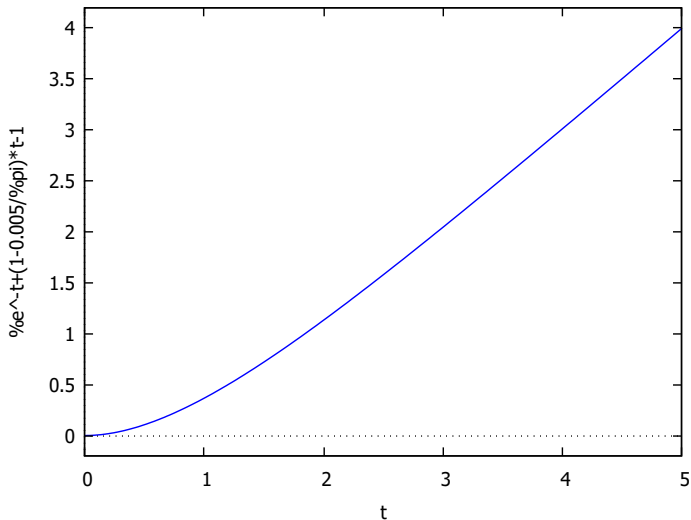
Teraz droga $s(0) = 0$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t \left(-e^{-\tau} - \frac{0.005}{\pi} \cos(20\pi\tau) + 1 - \frac{0.005}{\pi} \right) d\tau \\ &= e^{-\tau} - \frac{0.00025}{\pi^2} \sin(20\pi\tau) + \left(1 + \frac{0.005}{\pi} \right) \tau \Big|_0^t \\ &\approx e^{-t} + \left(1 + \frac{0.005}{\pi} \right) t - 1. \end{aligned}$$

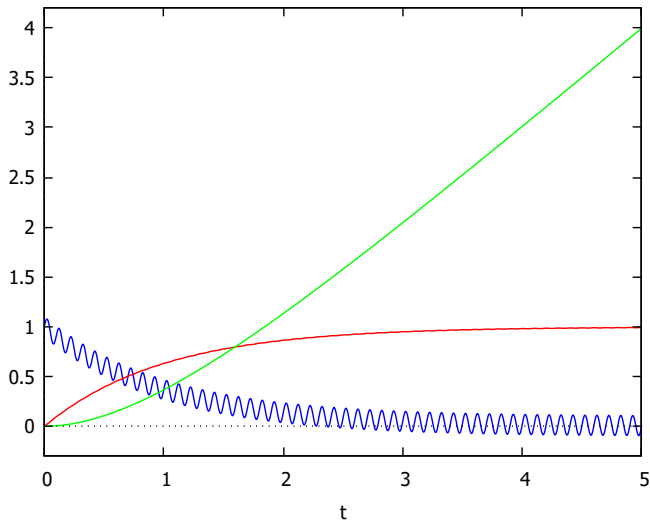


Wykres $a(t)$ 

Wykres $v(t)$ 

Wykres $s(t)$ 

Wykresy



Zastosowania

Do mierzenia przyspieszenia służy *akcelerometr*, czyli miernik przyspieszenia: *przyspieszeniometer*.

Akcelerometry mają wiele zastosowań w przemyśle, medycynie, transporcie oraz urządzeniach powszechnego użytku, są podstawą działania nawigacji inercyjnej, stosowanej pierwotnie w samolotach i pociskach kierowanych. Akcelerometry wykonywane w technologii układów mikromechanicznych znajdują powszechne zastosowania w przenośnych urządzeniach elektronicznych, takich jak smartfony, tablety, kontrolery gier, opaski fitnessowe.

Wikipedia: [Akcelerometr](#)



Wzór na całkowanie przez części

Ze wzoru na całkowania przez części dla całki nieoznaczonej wynika metoda całkowania przez części dla całki oznaczonej.

Twierdzenie

Jeśli f' i g' – ciągłe, to

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx,$$



Przykład

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e x' \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x (\ln x)' \, dx \\ &= e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1.\end{aligned}$$



Przykład

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e x' \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x (\ln x)' \, dx \\ &= e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1.\end{aligned}$$

Inaczej

$$F(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + c,$$

skąd

$$\int_1^e \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_1^e = e \cdot (1 - 1) - 1 \cdot (0 - 1) = 1.$$



Przykład – Maxima

```
(%i1) integrate(log(x), x);  
(%o1) x*log(x)-x  
(%i2) integrate(log(x), x, 1, %e);  
(%o2) 1
```



Wzór na całkowanie przez podstawianie

Bardziej skomplikowane jest obliczanie całek oznaczonych przez podstawianie, bo wymaga to na ogół zmian granic całkowania.

Twierdzenie

$$\int_a^b g(f(x))f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy,$$

gdzie $y = f(x)$, czyli

$$\int_a^b z \frac{dy}{dx} dx = \int_{f(a)}^{f(b)} z dy.$$



Przykład 1

$$I_1 = \int_0^1 x e^{x^2/2} dx$$

Podstawiamy $t = x^2/2$, skąd $dt = x dx$. Ponieważ x zmienia się od 0 do 1, to t zmienia się od 0 do $1/2$. Stąd

$$I_1 = \int_0^{1/2} e^t dt = e^t \Big|_0^{1/2} = \sqrt{e} - 1.$$



Przykład 2

$$I_2 = \int_0^2 x e^{x^2/2} dx.$$

Podstawiamy $t = x^2/2$, skąd $dt = x dx$. Ponieważ x zmienia się od 0 do 2, to t zmienia się od 0 do 2. Stąd

$$I_2 = \int_0^2 e^t dt = e^t \Big|_0^2 = e^2 - 1.$$

Zauważmy, że brak zmiany granicy całkowania w całce I_2 daje w rezultacie ten sam wynik co jest przypadkową zbieżnością z prawdziwą wartością całki I_2 .



Przykład 3

$$I_3 = \int_0^{\ln 2} x e^{x^2/2} dx.$$

Podstawiamy $t = x^2/2$, skąd $dt = x dx$. Ponieważ x zmienia się od 0 do $\ln 2$, to t zmienia się od 0 do $(\ln^2 2)/2$. Stąd

$$I_3 = \int_0^{(\ln^2 2)/2} e^t dt = e^t \Big|_0^{(\ln^2 2)/2} = \exp \frac{(\ln^2 2)}{2} - 1 \approx 0.2715371297141405.$$



Przykład – Maxima

```
(%i1) integrate(x*exp(x^2/2), x);  
(%o1) %e^(x^2/2)  
(%i2) integrate(x*exp(x^2/2), x,0,1);  
(%o2) sqrt(%e)-1  
(%i3) integrate(x*exp(x^2/2), x,0,2);  
(%o3) %e^2-1  
(%i4) integrate(x*exp(x^2/2), x,0,log(2));  
(%o4) %e^(log(2)^2/2)-1  
(%i5) %,numer;  
(%o5) 0.2715371297141405
```



Przykład – Maxima c.d.

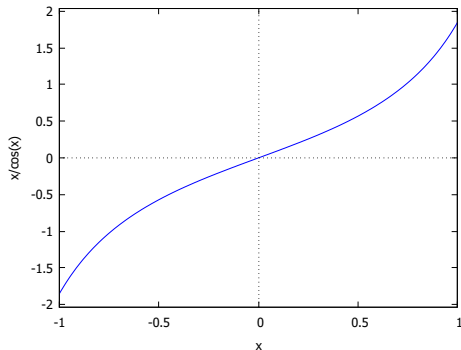
$$\int_{-1}^1 e^{x^2/2} dx$$

```
(%i1) integrate(exp(x^2/2), x);  
(%o1) -(sqrt(%pi)*%i*erf((%i*x)/sqrt(2)))/sqrt(2)  
(%i2) integrate(exp(x^2/2), x,-1,1);  
(%o2) -sqrt(2)*sqrt(%pi)*%i*erf(%i/sqrt(2))  
(%i3) %,numer;  
(%o3) 2.389915323820455
```



Inny przykład – Maxima

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\cos x} dx = 0.$$



```
(%i1) integrate(x/cos(x), x);  
(%o1) integrate(x/cos(x), x)  
(%i2) integrate(x/cos(x), x, -1, 1);  
(%o2) 0
```



Zamiana granic całkowania

Jeżeli dolna granica całkowania jest większa od górnej, to z definicji całki oznaczonej wynika wzór

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

