

Matematyka II

Wykład 2

Całki nieoznaczone

Wojciech Kordecki

wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2025/26



Funkcja pierwotna

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale (a, b) , być może nieskończonym.

Definicja

F jest funkcją pierwotną funkcji f , gdy $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.



Funkcja pierwotna

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale (a, b) , być może nieskończonym.

Definicja

F jest funkcją pierwotną funkcji f , gdy $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Twierdzenie

Jeśli F i G są funkcjami pierwotnymi dla funkcji f , to

$$F(x) = G(x) + c, \quad c = \text{const.}$$

Inaczej mówiąc, funkcja pierwotna jest określona z dokładnością do stałej.



Przykłady (1)

Oznaczenie: $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

$$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x + c.$$

$$f(x) = \sin x, \quad F(x) = -\cos x + c.$$

$$f(x) = e^x, \quad F(x) = e^x + c.$$

$$f(x) = e^{-x}, \quad F(x) = -e^{-x} + c.$$



Przykłady (2)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = \ln|x| + c.$$

Uzasadnienie:

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{gdy } x > 0, \\ \ln(-x) & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Dziedziną funkcji $\ln|x|$ jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{gdy } x > 0, \\ -\frac{1}{x} & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Do przemyślenia!



Całka nieoznaczona

Oznaczenie

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

gdy $F'(x) = f(x)$.



Całka nieoznaczona

Oznaczenie

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

gdy $F'(x) = f(x)$.

Wyrażenie stojące po lewej stronie wzoru nazywa się całką nieoznaczoną funkcji f po zmiennej x .



Całka nieoznaczona

Oznaczenie

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

gdy $F'(x) = f(x)$.

Wyrażenie stojące po lewej stronie wzoru nazywa się całką nieoznaczoną funkcji f po zmiennej x .

Wzory:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x),$$

$$\int \frac{dF(x)}{dx} dx = F(x) + c$$

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$



Całkowanie a różniczkowanie

Całkowanie, to znajdowanie funkcji pierwotnej – problem odwrotny do różniczkowania.



Całkowanie a różniczkowanie

Całkowanie, to znajdowanie funkcji pierwotnej – problem odwrotny do różniczkowania.

Przykład.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

gdyż

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = (n+1) x^{(n+1)-1} \frac{1}{n+1} = x^n.$$



Różniczka

Niech f – różniczkowalna, $y = f(x)$:

$$dy = f'(x) dx$$

$$df(x) = f'(x) dx$$

$$df(x) = \frac{dy}{dx} dx.$$



Różniczka

Niech f – różniczkowalna, $y = f(x)$:

$$dy = f'(x) dx$$

$$df(x) = f'(x) dx$$

$$df(x) = \frac{dy}{dx} dx.$$

Przyrost wartości funkcji:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$



Różniczka

Niech f – różniczkowalna, $y = f(x)$:

$$dy = f'(x) dx$$

$$df(x) = f'(x) dx$$

$$df(x) = \frac{dy}{dx} dx.$$

Przyrost wartości funkcji:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Przybliżenie:

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x.$$



Różniczka

Niech f – różniczkowalna, $y = f(x)$:

$$dy = f'(x) dx$$

$$df(x) = f'(x) dx$$

$$df(x) = \frac{dy}{dx} dx.$$

Przyrost wartości funkcji:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Przybliżenie:

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x.$$

Przypomnienie:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Wybrane całki

Funkcja $f(x)$	Całka $\int f(x) dx$
0	c
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$



Istnienie całki nieoznaczonej

Twierdzenie

Niech f ma funkcję pierwotną w (a, b) , $x_0 \in (a, b)$. Wtedy istnieje tylko jedna funkcja pierwotna F taka, że $F(x_0) = y_0$.



Istnienie całki nieoznaczonej

Twierdzenie

Niech f ma funkcję pierwotną w (a, b) , $x_0 \in (a, b)$. Wtedy istnieje tylko jedna funkcja pierwotna F taka, że $F(x_0) = y_0$.

Twierdzenie

Każda funkcja ciągła w przedziale (a, b) ma w tym przedziale funkcję pierwotną.



Suma i mnożenie przez stałą

Zakładamy dalej, że funkcje f i g są ciągłe.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx.$$



Suma i mnożenie przez stałą

Zakładamy dalej, że funkcje f i g są ciągłe.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx.$$

Ostrzeżenie!

Nie istnieje wzór na całkę iloczynu funkcji.



Mnożenie argumentu przez stałą

Niech

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Ponieważ

$$\frac{df(ax)}{dx} = af'(ax),$$

to

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c.$$



Przykład (1)

$$\int e^{x/2} dx = 2e^{x/2} + c.$$



Przykład (1)

$$\int e^{x/2} dx = 2e^{x/2} + c.$$

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c.$$



Przykład (1)

$$\int e^{x/2} dx = 2e^{x/2} + c.$$

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c.$$

$$\int \frac{2}{1 + (x/2)^2} dx = \frac{2}{\frac{1}{2}} \arctg(x/2) + c = 4 \arctg(x/2).$$



Przykład (2)

$$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \ln |3x| + c.$$



Przykład (2)

$$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \ln |3x| + c.$$

$$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \ln |x| + c'.$$



Przykład (2)

$$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \ln |3x| + c.$$

$$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \ln |x| + c'.$$

$$\ln |3x| + c = \ln 3 + \ln |x| + c = \ln |x| + c' \implies c' = 3 + c.$$



Przypomnienie – pochodna iloczynu

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$



Przypomnienie – pochodna iloczynu

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Wniosek:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx, \end{aligned}$$



Wzór na całkowanie przez części

Twierdzenie

Jeśli f' i g' – ciągłe, to

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx,$$

czyli

$$\int y \frac{dz}{dx} dx = yz - \int z \frac{dy}{dx} dx$$

albo

$$\int y dz = yz - \int z dy.$$



Przykład 1

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int x' \ln x \, dx \\&= x \ln x - \int x(\ln x)' \, dx \\&= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\&= x \ln x - \int dx \\&= x \ln x - x + c \\&= x(\ln x - 1) + c.\end{aligned}$$



Przykład 2

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x \, dx \\&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} (\ln x)' \, dx \\&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \\&= \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c.\end{aligned}$$



Przykład 3 (1)

$$\begin{aligned}\int (\sin x) (\cos x) dx &= \int (\sin x) (\sin x)' dx \\ &= \sin^2 x - \int (\cos x) (\sin x) dx\end{aligned}$$



Przykład 3 (1)

$$\begin{aligned}\int (\sin x) (\cos x) dx &= \int (\sin x) (\sin x)' dx \\ &= \sin^2 x - \int (\cos x) (\sin x) dx\end{aligned}$$

$$2 \int (\sin x) (\cos x) dx = \sin^2 x + c,$$



Przykład 3 (1)

$$\begin{aligned}\int (\sin x) (\cos x) dx &= \int (\sin x) (\sin x)' dx \\ &= \sin^2 x - \int (\cos x) (\sin x) dx\end{aligned}$$

$$2 \int (\sin x) (\cos x) dx = \sin^2 x + c,$$

czyli

$$\int (\sin x) (\cos x) dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$



Przykład 3 (2)

Obliczenia *Maxima*:

```
(%i1) integrate((sin(x))*(cos(x)), x);  
(%o1) -cos(x)^2/2
```

czyli

$$\int (\sin x) (\cos x) dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + c.$$

Czy coś poszło nie tak?



Przykład 3 (3)

Stała c jest dowolna, więc zmienimy ją na $c' = c - 1/2$.

$$\int (\sin x) (\cos x) dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c - \frac{1}{2},$$

ale

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2}.$$



Przykład 3 (3)

Stała c jest dowolna, więc zmienimy ją na $c' = c - 1/2$.

$$\int (\sin x) (\cos x) dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c - \frac{1}{2},$$

ale

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2}.$$

Wszystko się zgadza, bo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.



Przykład 4

$$\int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$



Przykład 4

$$\int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \int (e^x)' \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx.$$



Przykład 4

$$\int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \int (e^x)' \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx.$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx.$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}.$$



Wzór na całkowanie przez podstawianie

Twierdzenie

Wzór na całkowanie przez podstawianie

$$\int g(f(x))f'(x) dx = \int g(y) dy,$$

gdzie $y = f(x)$, czyli

$$\int z \frac{dy}{dx} dx = \int z dy.$$



Najprostsze podstawienia

$$\int g(ax) dx = \frac{1}{a} \int g(y) dy, \quad y = ax, \quad dy = a dx,$$
$$\int f(a+x) dx = \int f(y) dy, \quad y = a+x, \quad dy = dx.$$



Najprostsze podstawienia

$$\int g(ax) dx = \frac{1}{a} \int g(y) dy, \quad y = ax, \quad dy = a dx,$$
$$\int f(a+x) dx = \int f(y) dy, \quad y = a+x, \quad dy = dx.$$

Podstawiając $t = f(x)$, $dt = f'(x) dx$ otrzymujemy

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |f(x)| + c.$$



Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int x e^{x^2} dx.$$



Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int x e^{x^2} dx.$$

Ponieważ $(x^2)' = 2x$, to całkę I można przedstawić w postaci

$$I(x) = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx$$

i dokonać podstawienia $t = x^2$.



Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int x e^{x^2} dx.$$

Ponieważ $(x^2)' = 2x$, to całkę I można przedstawić w postaci

$$I(x) = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx$$

i dokonać podstawienia $t = x^2$. Wtedy $dt = 2x dx$ skąd

$$I(x) = \frac{1}{2} \int e^t dt = e^t + c.$$



Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int x e^{x^2} dx.$$

Ponieważ $(x^2)' = 2x$, to całkę I można przedstawić w postaci

$$I(x) = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx$$

i dokonać podstawienia $t = x^2$. Wtedy $dt = 2x dx$ skąd

$$I(x) = \frac{1}{2} \int e^t dt = e^t + c.$$

Wracając do starych zmiennych otrzymujemy

$$I(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$



Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int x e^{x^2} dx.$$

Ponieważ $(x^2)' = 2x$, to całkę I można przedstawić w postaci

$$I(x) = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx$$

i dokonać podstawienia $t = x^2$. Wtedy $dt = 2x dx$ skąd

$$I(x) = \frac{1}{2} \int e^t dt = e^t + c.$$

Wracając do starych zmiennych otrzymujemy

$$I(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

Sprawdzenie przez różniczkowanie funkcji złożonej e^{x^2} :

$$\left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right)' = x e^{x^2}.$$



Przykład całkowania przez podstawianie c.d.

Podobnej na pozór całki

$$\Phi(x) = \int e^{x^2} dx$$

nie da się w ten sposób obliczyć.

Co więcej, tak określona funkcja $\Phi(x)$, mająca olbrzymie znaczenie w statystyce, nie jest funkcją elementarną.



Przykład (1)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).



Przykład (1)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

$$\int (\sin x) (\cos x) dx = \int t (\sin x) (\cos x) dx$$

Podstawiamy:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x.$$



Przykład (1)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

$$\int (\sin x) (\cos x) dx = \int t(\sin x) (\cos x) dx$$

Podstawiamy:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x.$$

$$\int t(\sin x) (\cos x) dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$



Przykład (2)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).



Przykład (2)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

$$\int (\sin x) (\cos x) dx = \int t (\cos x) (\sin x) dx$$

Podstawiamy:

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x.$$



Przykład (2)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

$$\int (\sin x) (\cos x) dx = \int t (\cos x) (\sin x) dx$$

Podstawiamy:

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x.$$

$$\int t (\sin x) (\cos x) dx = - \int y dy = -\frac{y^2}{2} + c' = -\frac{\cos^2 x}{2} + c'.$$



Przykład (3)

$$\frac{\sin^2 x}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + c'.$$



Przykład (3)

$$\frac{\sin^2 x}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + c'.$$

$$\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos^2 x}{2} = c' - c.$$



Przykład (3)

$$\frac{\sin^2 x}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + c'.$$

$$\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos^2 x}{2} = c' - c.$$

$$\frac{1}{2} = c' - c \implies c' = c + \frac{1}{2}.$$



Licznik pochodną mianownika

Obliczamy całkę postaci

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx,$$

czyli całkę, gdy licznik jest pochodną mianownika.



Licznik pochodną mianownika

Obliczamy całkę postaci

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx,$$

czyli całkę, gdy licznik jest pochodną mianownika.

Podstawienie $t = f(x)$, więc $dt = f'(x) dx$



Licznik pochodną mianownika

Obliczamy całkę postaci

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx,$$

czyli całkę, gdy licznik jest pochodną mianownika.

Podstawienie $t = f(x)$, więc $dt = f'(x) dx$

Wtedy

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C.$$



Licznik pochodną mianownika – przykład (1)

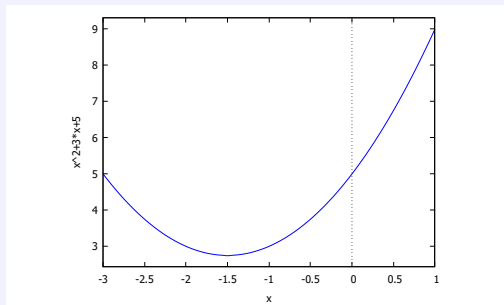
$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5} dx = \int \frac{(x^2 + 3x + 5)'}{x^2 + 3x + 5} dx = \ln(x^2 + 3x + 5) + C.$$



Licznik pochodną mianownika – przykład (1)

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5} dx = \int \frac{(x^2 + 3x + 5)'}{x^2 + 3x + 5} dx = \ln(x^2 + 3x + 5) + C.$$

Uwaga. Można napisać $\ln(x^2 + 3x + 5)$ zamiast $\ln|x^2 + 3x + 5|$,
gdyż $x^2 + 3x + 5 > 0$, $\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$:



Licznik pochodną mianownika – przykład (2)

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$



Licznik pochodną mianownika – przykład (2)

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$



Podstawianie – trudniejszy przykład

Obliczymy całkę

$$I = \int (\cos^3 x) \sqrt{\sin x} \, dx.$$

Najpierw przekształcimy funkcję podcałkową do wygodniejszej postaci

$$(\cos^3 x) \sqrt{\sin x} = (\cos^2 x) (\cos x) \sqrt{\sin x} = (1 - \sin^2 x) (\cos x) \sqrt{\sin x}.$$

Teraz podstawimy $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$, skąd

$$\begin{aligned} I &= \int (1 - t^2) \sqrt{t} \, dt = \int t^{1/2} \, dt - \int t^{5/2} \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{7} t^{7/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} - \frac{2}{7} (\sin x)^{7/2} + C. \end{aligned}$$



Całki funkcji wymiernych

Funkcja wymierna to wielomian dzielony przez wielomian:

$$f(x) = \frac{W_1(x)}{W_2(x)},$$

gdzie W_1 i W_2 są wielomianami.

Całka z funkcji wymiernej jest zawsze funkcją elementarną –
Selwat, pkt. 11.3, str. 143.



Całki funkcji wymiernych

Funkcja wymierna to wielomian dzielony przez wielomian:

$$f(x) = \frac{W_1(x)}{W_2(x)},$$

gdzie W_1 i W_2 są wielomianami.

Całka z funkcji wymiernej jest zawsze funkcją elementarną –
Selwat, pkt. 11.3, str. 143.

W tym wykładzie zagadnienie to zostanie pominięte, bo proste nie
jest.



Całki funkcji wymiernych – *Maxima*

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 5}{x^2 - 5x - 3} dx$$
$$= \frac{221 \ln \left(\frac{2x - \sqrt{37} - 5}{2x + \sqrt{37} - 5} \right)}{2\sqrt{37}} + \frac{35 \ln (x^2 - 5x - 3)}{2} + \frac{x^2 + 12x}{2}$$

```
(%i1) f(x):=(x^3+x^2+2*x+5)/(x^2-5*x-3);
```

```
(%o1) f(x):=(x^3+x^2+2*x+5)/(x^2-5*x-3)
```

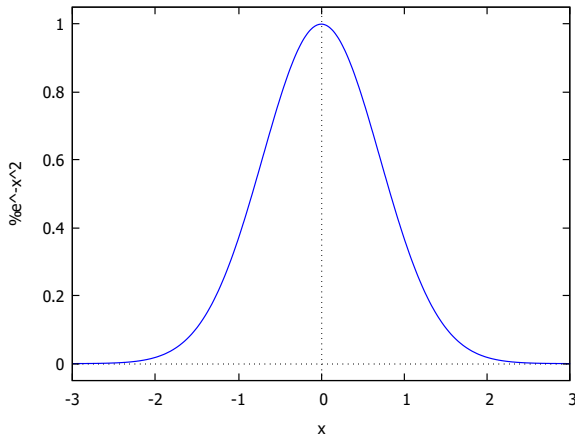
```
(%i2) integrate(f(x), x);
```

```
(%o2) (221*log((2*x-sqrt(37)-5)/(2*x+sqrt(37)-5)))/  
(2*sqrt(37))+(35*log(x^2-5*x-3))/2+(x^2+12*x)/2
```



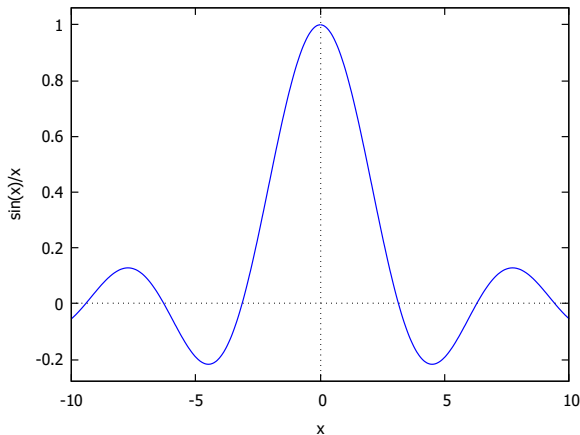
Całki, które nie są funkcjami elementarnymi (1)

$$f(x) = e^{-x^2}.$$



Całki, które nie są funkcjami elementarnymi (2)

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$



Całki, które nie są funkcjami elementarnymi (3)

```
(%i1) integrate(exp(-x^2), x);  
(%o1) (sqrt(%pi)*erf(x))/2
```

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2} + C$$

Funkcja $\operatorname{erf}(x)$ – funkcja błędu (error function).

```
(%i2) integrate(sin(x)/x, x);  
(%o2) -(%i*gamma_incomplete(0,%i*x)  
      -%i*gamma_incomplete(0,-%i*x))/2
```

