

Matematyka 2

Lista zadań 1.

Zadania oznaczone gwiazdką są nieco trudniejsze.

Zadania oznaczone dwiema gwiazdkami są znacznie trudniejsze i często wymagają skorzystania z programów do obliczeń symbolicznych lub samodzielnego zaprogramowania. Są nieobowiązkowe.

1. Obliczyć pochodne funkcji

$$(a) e^x \sin x, \quad (b) e^x \ln x, \quad (c) (\sin 2\pi x) (\log_2 x),$$

$$(d) \frac{e^x}{\sin x}, \quad (e) \frac{e^x}{\ln x}, \quad (f) \frac{(\sin 2\pi x)}{(\log_2 x)}$$

2. Obliczyć dwie pierwsze pochodne funkcji

$$(a) x^x + x^{2x}, \quad (b) x^{\ln x} + x^3 + x^2 + x + 1, \quad (c) \frac{(\sin x)(e^x + 1)}{\cos x}$$

$$(d) \frac{\sin(e^{x^2})}{x}, \quad (e) \ln(\operatorname{tg}(e^x)), \quad (f) \frac{x^3 + x + 1}{\log_2 x}.$$

3. Niech

$$f(x) = \sin(x^2), \quad g(x) = (\ln x)^2,$$

$$h(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \quad k(x) = (\cos x)^2.$$

Dla podanych wyżej funkcji obliczyć trzecią i czwartą pochodną.

4**. Obliczyć pochodne wyższych rzędów funkcji (≥ 5) z zadania 3 i przedstawić je w możliwie najprostszej postaci. Wyniki porównać z wynikami otrzymanymi za pomocą programów do obliczeń symbolicznych (Maxima, Wolfram Alpha, Symbolab, itp).

5. Obliczyć przybliżoną wartość $\ln x$, dla $x = 0.8$, $x = 1.8$ oraz dla $x = 2.8$ korzystając ze wzoru Taylora dla kolejnych $n = 1, 2, 3, 4$. Porównać z wartościami dokładnymi.

6. Podać wzór na przybliżoną wartość $\sin(x^2)$ z dokładnością do 0.01

- korzystając ze wzoru Maclaurina dla $\sin x$,
- obliczając współczynniki we wzorze Maclaurina dla $\sin(x^2)$.

W obu przypadkach podać resztę w postaci Lagrange'a i Cauchy'ego.

7*. Niech

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Obliczyć kilka pierwszych współczynników we wzorze Taylora dla $x_0 = 1$. Podać reszty w postaci Lagrange'a i Cauchy'ego.

8**. Korzystając z wyników zadania 7 narysować (programowo) wykresy przybliżeń i porównać je z wykresem funkcji $f(x)$.

9. Znaleźć (obliczyć, wyszukać w podręczniku lub w internecie) rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\operatorname{tg} x$. Obliczyć promień zbieżności.

10. Korzystając z zadania 9 znaleźć rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\operatorname{tg}(x^2/2)$. Znaleźć promień zbieżności.

11*. Uzasadnić, że jeśli we wzorze Maclaurina współczynniki a_k są naprzemiennie dodatnie i ujemne, to błąd przybliżenia nie przekracza wartości bezwzględnej pierwszego pominiętego wyrazu $|a_{n+1}|$. Oznacza to, że wystarczy obliczyć wyrazy do potęgi x^n włącznie.

12**. Korzystając z rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji e^x , napisać w dowolnym języku program do tworzenia tablic z wartościami funkcji e^{-x^2} dla $x = 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$ z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych.

Wojciech Kordecki