Matematyka II

Wykład 7

Równania różniczkowe zwyczajne c.d.

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Równania liniowe drugiego rzędu – ogólnie

Ogólna postać równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu:

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = r(x)\,.$$

Ograniczymy się dalej tylko do równań o stałych współczynnikach, tzn. do przypadku $a(x) = 1$, $b(x) = p$ i $c(x) = q$. Wtedy równanie ma postać

$$y'' + py' + qy = r(x)\,.$$

Równanie jest jednorodne, gdy $r(x) = 0$, czyli

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Równanie charakterystyczne

Równanie charakterystyczne równania

$$y'' + py' + qy = r(x).$$

ma postać

$$s^2 + ps + q = 0$$

dla którego wyróżnik Δ wyraża się wzorem

$$\Delta = p^2 - 4q. \tag{1}$$

Równanie kwadratowe – przypomnienie

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Wyróżnik tego równania:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Rozwiązania:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

gdzie $\sqrt{\Delta}$ jest pierwiastkiem zespolonym.

Liczby zespolone – przypomnienie

Liczba zespolona: $z = a + bi$, gdzie $i^2 = -1$.

Liczby zespolone – przypomnienie

Liczba zespolona: $z = a + bi$, gdzie $i^2 = -1$.

Liczba sprzężona do liczby z to $\bar{z} = a - bi$.

Liczby zespolone – przypomnienie

Liczba zespolona: $z = a + bi$, gdzie $i^2 = -1$.

Liczba sprzężona do liczby z to $\bar{z} = a - bi$.

Liczba rzeczywista ma dwa pierwiastki zespolone:
Przykład.

$$\sqrt{4} = \{-2, 2\}.$$
$$\sqrt{-4} = \{-2i, 2i\}.$$

Liczby zespolone – przypomnienie

Liczba zespolona: $z = a + bi$, gdzie $i^2 = -1$.

Liczba sprzężona do liczby z to $\bar{z} = a - bi$.

Liczba rzeczywista ma dwa pierwiastki zespolone:
Przykład.

$$\sqrt{4} = \{-2, 2\}.$$
$$\sqrt{-4} = \{-2i, 2i\}.$$

Wniosek. Równanie kwadratowe ma zawsze:

1. albo dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $\Delta > 0$
2. albo jeden pierwiastek podwójny: $\Delta = 0$
3. albo dwa sprzężone pierwiastki zespolone: $\Delta < 0$.

Rozwiązanie ogólne: $\Delta > 0$

Równanie:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Równanie charakterystyczne równania:

$$s^2 + ps + q = 0.$$

Rozwiązanie y_{oj} dla $\Delta > 0$, pierwiastki $s_1 \neq s_2$:

$$y_{oj} = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}.$$

Przykład: $\Delta > 0$

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Równanie charakterystyczne:

$$s^2 - 5s + 6 = 0.$$

Rozwiązanie równania charakterystycznego:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1, \; s_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \; s_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Rozwiązanie równania:

$$y_{oj} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Rozwiązanie ogólne: $\Delta = 0$

Równanie:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Równanie charakterystyczne równania:

$$s^2 + ps + q = 0.$$

Rozwiązanie y_{oj} dla $\Delta = 0$, pierwiastek s_0:

$$y_{oj} = C_1 e^{s_0 x} + C_2 x e^{s_0 x}.$$

Przykład: $\Delta = 0$

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Równanie charakterystyczne:

$$s^2 - 2s + 1 = 0.$$

Rozwiązanie równania charakterystycznego:

$$\Delta = 2^2 - 4 = 0, \ s_0 = 1.$$

Rozwiązanie równania:

$$y_{oj} = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Rozwiązanie ogólne: $\Delta < 0$

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Równanie charakterystyczne równania:

$$s^2 + ps + q = 0.$$

Rozwiązanie y_{oj} dla $\Delta < 0$, pierwiastki $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$:

$$y_{oj} = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \right).$$

Przykład: $\Delta < 0$

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Równanie charakterystyczne:

$$s^2 + 6s + 13 = 0.$$

Rozwiązanie równania charakterystycznego:

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 13 = 36 - 52 = -16,$$
$$s_1 = \frac{-6 - 4i}{2} = -3 - 2i, \; s_2 = \frac{-6 + 4i}{2} = -3 + 2i.$$

Rozwiązanie równania:

$$y_{oj} = e^{-3x} \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \right).$$

Warunki początkowe

Zakładamy, że otrzymane rozwiązanie $y_{oj}(x)$ spełni dla wybranego x_0 warunki

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y_1.$$

Podstawiamy je do rozwiązania y_{oj} i otrzymujemy układ dwóch równań z niewiadomymi C_1 i C_2.

Warunki początkowe - przykład

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$y_{oj} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},$$
$$y'_{oj} = 2C_1 e^{2x} + C_2 3e^{3x}.$$

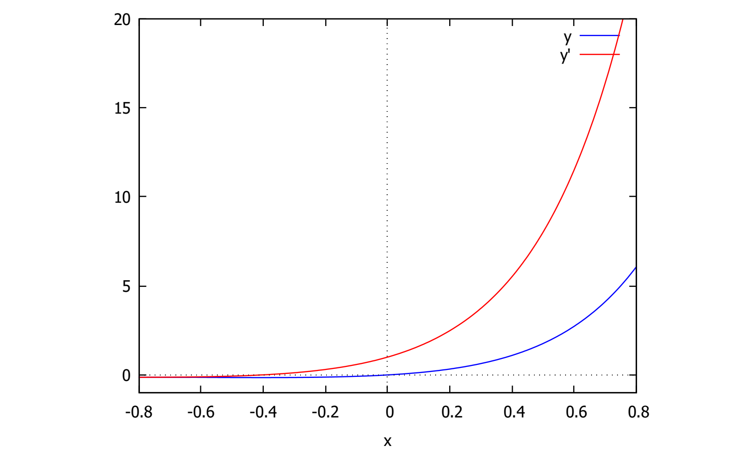
Warunki początkowe: $y_{oj}(0) = y_0 = 0,\ y'_{oj}(0) = y_1 = 1.$

$$C_1 + C_2 = 0,\ 2C_1 + 3C_2 = 1,$$

skąd $C_1 = -1,\ C_2 = 1.$
Wtedy otrzymujemy y_{sj} spełniające warunki $y_{sj}(0) = 0$ i $y'_{sj}(0) = 1$:

$$y_{sj} = -e^{2x} + e^{3x}.$$

Warunki początkowe - przykład c.d.



Równanie wahadła

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\theta(t) = 0,$$

gdzie

- $\theta(t)$ – kąt odchylenia wahadła od pionu w chwili t, przy czym kąt ten przyjmują wartości dodatnie np. dla odchyleń w prawo, a ujemne dla odchyleń w lewo,
- g – przyspieszenie ziemskie,
- r – długość nici.

Równanie wahadła – model uproszczony

Dla małych θ mamy

$$\sin\theta \approx \theta.$$

Równanie

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\theta(t) = 0,$$

upraszcza się do równania

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{r}\theta(t) = 0.$$

Równanie wahadła – model uproszczony

Dla małych θ mamy

$$\sin\theta \approx \theta.$$

Równanie

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\theta(t) = 0,$$

upraszcza się do równania

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{r}\theta(t) = 0.$$

Jest to równanie jednorodne o stałych współczynnikach.

Równanie wahadła – równanie charakterystyczne

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{r}\theta(t) = 0.$$

Równanie charakterystyczne

$$s^2 + \frac{g}{r} = 0,$$

skąd

$$\Delta = -\frac{g}{r} < 0.$$

Rozwiązanie – ruch wahadła

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{r}\theta(t) = 0.$$

Przyjmijmy

$$\omega = \frac{g}{r}.$$

Wtedy

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega\theta(t) = 0.$$

Rozwiązanie – ruch wahadła

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{r}\theta(t) = 0.$$

Przyjmijmy

$$\omega = \frac{g}{r}.$$

Wtedy

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega\theta(t) = 0.$$

Rozwiązanie:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Ruch wahadła – warunki początkowe

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi) .$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \theta_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) .$$

Ruch wahadła – warunki początkowe

$$\theta\left(t\right)=\theta_0\sin\left(\omega t+\varphi\right).$$

$$\frac{d\theta\left(t\right)}{dt}=\theta_0\omega\cos\left(\omega t+\varphi\right).$$

$$\theta\left(0\right)=\theta_0\sin\varphi.$$

$$\left.\frac{d\theta\left(t\right)}{dt}\right|_{t=0}=\theta_0\omega\cos\varphi.$$

Prawdziwe wahadło

Wahadło rzeczywiste, którego ruch można opisać za pomocą modelu wahadła matematycznego (Katedra Metropolitalna, miasto Meksyk).
Źródło: Wikipedia https://pl.wikipedia.org/wiki/Wahad%C5%82o

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

$$y'' + py' + qy = f(x) .$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$y'' + py' + qy = 0$$

jest postaci

$$y_{oj} = C_1 y_1 + C_2 y_2 .$$

Δ	y_1	y_2
> 0	$e^{s_1 x}$	$e^{s_2 x}$
$= 0$	$e^{s_0 x}$	$xe^{s_0 x}$
< 0	$e^{\alpha x} \cos \beta x$	$e^{\alpha x} \sin \beta x$

Uzmiennianie stałych

$$y_{on} = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2.$$

Uzmiennianie stałych

$$y_{on} = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2.$$

Układ równań z niewiadomymi $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

Uzmiennianie stałych

$$y_{on} = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2.$$

Układ równań z niewiadomymi $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

Całkujemy $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$ i dostajemy $C_1(x)$ i $C_2(x)$.

Przykład (1)

$$y'' + y' - 2y = x.$$

Przykład (1)

$$y'' + y' - 2y = x.$$

Najpierw równanie jednorodne

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Przykład (1)

$$y'' + y' - 2y = x.$$

Najpierw równanie jednorodne

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Równanie charakterystyczne

$$s^2 + s - 2 = 0$$

ma wyróżnik $\Delta = 9 > 0$ i pierwiastki $s_1 = 1$, $s_2 = -2$.

Przykład (1)

$$y'' + y' - 2y = x.$$

Najpierw równanie jednorodne

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Równanie charakterystyczne

$$s^2 + s - 2 = 0$$

ma wyróżnik $\Delta = 9 > 0$ i pierwiastki $s_1 = 1$, $s_2 = -2$.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x, & y_2 &= e^{-2x}, \\ y_1' &= e^x, & y_2' &= -2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Przykład (2)

Obliczamy $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$.

$$C_1'(x) = \frac{xe^{-x}}{3}$$
$$C_2'(x) = \frac{-xe^{2x}}{3}$$

Przykład (2)

Obliczamy $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$.

$$C_1'(x) = \frac{xe^{-x}}{3}$$
$$C_2'(x) = \frac{-xe^{2x}}{3}$$

Całkujemy:

$$C_1(x) = -\frac{(x+1)\,e^{-x}}{3}$$
$$C_2(x) = -\frac{(2x-1)\,e^{2x}}{12}$$

Przykład (3)

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y_{on} = \left(-\frac{(x+1)\,e^{-x}}{3} + c_1\right) e^{x} + \left(-\frac{(2x-1)\,e^{2x}}{12} + c_2\right) e^{-2x}$$
$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{2x+1}{4}\,.$$

Przykład (3)

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y_{on} = \left(-\frac{(x+1)\,e^{-x}}{3} + c_1\right) e^{x} + \left(-\frac{(2x-1)\,e^{2x}}{12} + c_2\right) e^{-2x}$$
$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{2x+1}{4}\,.$$

$$y_{on} = y_{oj} - \frac{2x+1}{4}\,.$$

Przykład (3)

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y_{on} = \left(-\frac{(x+1)\,e^{-x}}{3} + c_1\right) e^{x} + \left(-\frac{(2x-1)\,e^{2x}}{12} + c_2\right) e^{-2x}$$
$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{2x+1}{4}\,.$$

$$y_{on} = y_{oj} - \frac{2x+1}{4}\,.$$

Tutaj

$$y_{on} = y_{oj} + y_{sn}\,,$$

gdzie

$$y_{sn} = -\frac{2x+1}{4}\,.$$

Przykład – *Maxima*

–> ode2('diff(y,x,2)+'diff(y,x)-2*y=0, y, x);

$$y = \%k1\%e^{x} + \%k2\%e^{-2x} \qquad (\%\ o1)$$

–> ode2('diff(y,x,2)+'diff(y,x)-2*y=x, y, x);

$$y = \%k1\%e^{x} + \%k2\%e^{-2x} - \frac{2x+1}{4} \qquad (\%\ o2)$$

Przykład – warunki początkowe

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{2x+1}{4}.$$

$$y' = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}.$$

Warunki początkowe dla $x = 0$:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

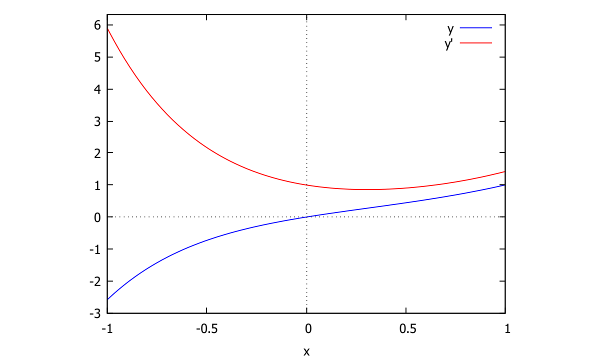
$$0 = c_1 + c_2 + 1/4,\ 1 = c_1 - 2c_2 - 1/2,$$

skąd $c_1 = 2/3,\ c_2 = -5/12.$

Przykład – wykres

$$y = \frac{2e^x}{3} - \frac{5e^{-2x}}{12} - \frac{2x+1}{4}$$

$$y' = \frac{2e^x}{3} - \frac{5e^{-2x}}{6} - \frac{1}{2}$$



Równania rzędu n

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n:

$$y^{(n)}+p_1(t)\,y^{(n-1)}+p_2(t)\,y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}(t)\,y'+p_n(t)\,y=h(t)\,.$$

Szczególnym przypadkiem jest równanie różniczkowe liniowe rzędu n jednorodne o stałych współczynnikach

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0.$$

Równania rzędu n

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n:

$$y^{(n)}+p_1(t)\,y^{(n-1)}+p_2(t)\,y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}(t)\,y'+p_n(t)\,y=h(t)\,.$$

Szczególnym przypadkiem jest równanie różniczkowe liniowe rzędu n jednorodne o stałych współczynnikach

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0.$$

Podobnie jak dla równań rzędu drugiego, można otrzymać rozwiązanie ogólne y_{on} korzystając z rozwiązania y_{oj}.

Definicja układów dynamicznych

Stacjonarne, liniowe układy dynamiczne z czasem ciągłym:

$$a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_l \frac{d^l u(t)}{dt^l} + b_{l-1} \frac{d^{l-1} u(t)}{dt^{l-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

gdzie $l < m$. Jeśli $a_m \neq 0$, to m jest rzędem równania różniczkowego.

- u – wejście,
- y – wyjście.

Układy dynamiczne – założenia

Zakłada się, że

$$\left.\frac{du^k(t)}{dt^k}\right|_{t=0-} = 0$$

dla $k = 0, 1, \ldots, l - 1$.

Warunki początkowe:

$$\left.\frac{dy^k(t)}{dt^k}\right|_{t=0-} = 0$$

dla $k = 1, 2, \ldots, m - 1$.

Modelowanie w programie Scilab – Xcos

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u(t), \quad x(0) = x_0, \; \dot{x}(0) = x_{10}\,.$$