Matematyka II

Wykład 6
Równania różniczkowe zwyczajne

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Pierwszy przykład

Niech

$$xy = y'$$

dla pewnej nieznanej funkcji $y = f(x)$.
Równanie to nazywa się równaniem różniczkowym.
Ponieważ nieznana funkcja jest jednej zmiennej, to równanie nazywa się równaniem różniczkowym zwyczajnym. Znajdowanie nieznanej funkcji nazywa się całkowaniem równania, a rozwiązanie y nazywa się całką równania różniczkowego.

Pierwszy przykład c.d.

Łatwo sprawdzić, że funkcja

$$y = Ce^{x^2/2},$$

spełnia równanie

$$xy = y'$$

dla dowolnej stałej C, bo

$$y' = C\left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{x^2/2} = xCe^{x^2/2} = xy.$$

Pierwszy przykład c.d.

Łatwo sprawdzić, że funkcja

$$y = Ce^{x^2/2},$$

spełnia równanie

$$xy = y'$$

dla dowolnej stałej C, bo

$$y' = C\left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{x^2/2} = xCe^{x^2/2} = xy.$$

Jak widać, otrzymano nie jedno, a rodzinę rozwiązań. Dla ustalonej stałej C, mamy jedno rozwiązanie, zwane rozwiązaniem szczególnym.
Rozwiązanie dla stałej dowolnej, nazywamy rozwiązaniem ogólnym.

Równania różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy.$$

Równania różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy.$$

Inna postać

$$\frac{f(x)}{g(y)} = \frac{dy}{dx}.$$

Równania różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy.$$

Inna postać

$$\frac{f(x)}{g(y)} = \frac{dy}{dx}.$$

Rozwiązanie równania otrzymuje się przez scałkowanie stronami:

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy.$$

Przykład (1)

Rozwiążmy równanie

$$xy = y'$$

Najpierw przekształcamy je do postaci:

$$\frac{dy}{y} = x\,dx.$$

Przykład (1)

Rozwiążmy równanie

$$xy = y'$$

Najpierw przekształcamy je do postaci:

$$\frac{dy}{y} = x\,dx.$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymujemy

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C'.$$

Przykład (1)

Rozwiążmy równanie

$$xy = y'$$

Najpierw przekształcamy je do postaci:

$$\frac{dy}{y} = x\,dx.$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymujemy

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C'.$$

Stałą C' wygodnie będzie zapisać jako logarytm innej stałej $C > 0$: $C' = \ln C$. Wtedy równanie można zapisać w postaci

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + \ln C$$

Przykład (1) c.d.

Dalej

$$\ln|y| = \ln\left(Ce^{x^2/2}\right),$$

skąd otrzymujemy

$$y = Ce^{x^2/2}.$$

Przykład (1) c.d.

Dalej

$$\ln|y| = \ln\left(Ce^{x^2/2}\right),$$

skąd otrzymujemy

$$y = Ce^{x^2/2}.$$

Stała C nie musi być już dodatnia, gdyż opuszczony został znak wartości bezwzględnej przy y. Może być również równa zeru, gdyż wtedy $y = 0$ też jest rozwiązaniem tego równania.

Przykład (1) – sprawdzenie

Poprawność rozwiązania można sprawdzić różniczkując rozwiązanie

$$y = Ce^{x^2/2},$$
$$y' = Cxe^{x^2/2}$$

Przykład (1) – sprawdzenie

Poprawność rozwiązania można sprawdzić różniczkując rozwiązanie

$$y = Ce^{x^2/2},$$
$$y' = Cxe^{x^2/2}$$

i podstawiając y' i y do równania:

$$xy = y'.$$

Przykład (1) – sprawdzenie

Poprawność rozwiązania można sprawdzić różniczkując rozwiązanie

$$y = Ce^{x^2/2},$$
$$y' = Cxe^{x^2/2}$$

i podstawiając y' i y do równania:

$$xy = y'.$$

Dostajemy

$$xCe^{x^2/2} = Cxe^{x^2/2}.$$

Przykład (2)

$$y' = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Trzeba założyć, że

1. albo $x \geq 0$ i $y > 0$
2. albo $x \leq 0$ i $y < 0$.

Przykład (2) – rozwiązanie

Pierwszy przypadek: $x \geq 0$ i $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Przykład (2) – rozwiązanie

Pierwszy przypadek: $x \geq 0$ i $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y}\,dy = \sqrt{x}\,dx,$$

Przykład (2) – rozwiązanie

Pierwszy przypadek: $x \geq 0$ i $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y}\, dy = \sqrt{x}\, dx,$$

$$\int y^{1/2}\, dy = \int x^{1/2}\, dx.$$

Przykład (2) – rozwiązanie

Pierwszy przypadek: $x \geq 0$ i $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y}\,dy = \sqrt{x}\,dx,$$

$$\int y^{1/2}\,dy = \int x^{1/2}\,dx.$$

$$\frac{2y^{3/2}}{3} = \frac{2x^{3/2}}{3} + C' \implies y^{3/2} = x^{3/2} + C \implies y = \left(x^{3/2} + C\right)^{2/3}.$$

Przykład (2) – rozwiązanie c.d.

Drugi przypadek: $x \leq 0$ i $y < 0$.
Istnieje

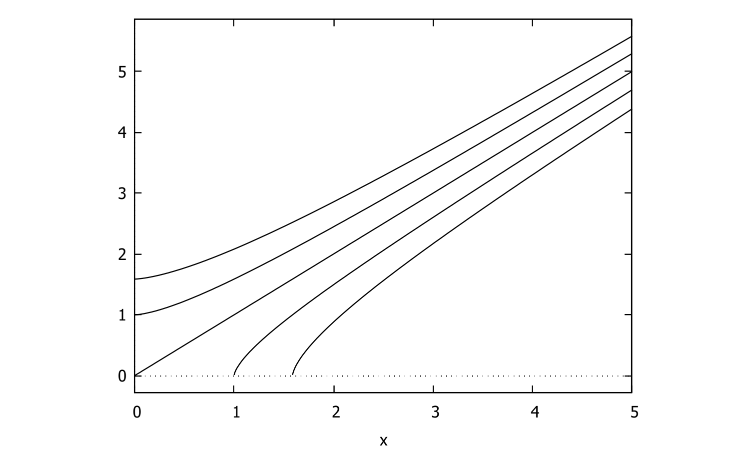
$$\sqrt{\frac{-x}{-y}} = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}.$$

Ograniczymy się do przypadku pierwszego.
Maxima

```
f(x,C):=if x>0 and (x^(3/2)+C)>0 then  (x^(3/2)+C)^(2/3)
```

Przykład (2) -wykresy rozwiązań

$$C = -2, -1, 0, 1, 2.$$



Definicja

Równanie różniczkowe postaci

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,,$$

nazywa się równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu. Równanie to jest liniowe, bo zarówno y jaki i y' występują w pierwszej potędze; jest pierwszego rzędu, bo występuje w nim tylko funkcja y i jej pierwsza pochodna.

Równanie jednorodne

Jeżeli $q(x) \equiv 0$, to równanie nazywa się równaniem liniowym jednorodnym:

$$y' + p(x)\,y = 0.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx.$$

Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, więc po obustronnym całkowaniu otrzymujemy

$$\ln y = -\int p(x)\,dx$$

skąd rozwiązanie jest postaci

$$y = \exp\left(-\int p(x)\,dx\right).$$

Jest rozwiązanie ogólne y_{oj} równania jednorodnego.
Stała C pojawi się po obliczeniu całki nieoznaczonej.

Przykład

Niech

$$y' - y = 0.$$

Przekształcamy to równanie do postaci

$$\frac{dy}{y} = x,$$

skąd

$$y = Ce^{x}$$

Rozwiązanie ogólne

Twierdzenie

Rozwiązanie ogólne y_{on} równania liniowego niejednorodnego

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,,$$

wyraża się wzorem

$$y_{on} = y_{oj} + y_{sn},$$

gdzie y_{oj} jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego,

$$y' + p(x)\,y = 0,$$

a y_{sn} jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego.

Rozwiązanie ogólne c.d.

Wynika stąd, że wystarczy rozwiązać równanie jednorodne, następnie „zgadnąć" dowolne rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego, a potem oba rozwiązania dodać.

Metoda przewidywań

Jeżeli $p(x) = \text{const}$, czyli równanie ma postać

$$y' + py = q(x),$$

to dla szczególnych postaci prawej strony $q(x)$, można przewidzieć postać rozwiązania szczególnego. Stąd nazwa „metoda przewidywań".

Niektóre z tych szczególnych postaci dla których można przewidzieć postać rozwiązania, podane są w tabeli.

Przewidywane postacie rozwiązań

$q(x)$ – prawa strona równania	Rozwiązania
$W_n(x)$	$Q_n(x)$
$W_n(x)e^{\alpha x}$	$Q_n(x)e^{\alpha x}$, gdy $p \neq -\alpha$
	$xQ_n(x)e^{\alpha x}$, gdy $p = -\alpha$
$ke^{\alpha x}$	$me^{\alpha x}$, gdy $p \neq -\alpha$
	$xme^{\alpha x}$, gdy $p = -\alpha$
$k\cos(bx) + l\sin(bx)$	$m\cos(bx) + n\sin(bx)$
$e^{\alpha x}(k\cos(bx) + l\sin(bx))$	$e^{\alpha x}(m\cos(bx) + n\sin(bx))$
$W_n(x)(\cos(bx) + \sin(bx))$	$Q_n(x)(\cos(bx) + \sin(bx))$

$W_n(x)$, $Q(n)_n$ – wielomiany stopnia n

Przykład (1)

Niech

$$y - y' = 3e^{-2x}.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$. Szukamy teraz rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Z tabeli: $y_{sn} = ae^{-2x}$. Podstawiając to rozwiązanie do równania niejednorodnego otrzymujemy

$$ae^{-2x} - \left(-2ae^{-2x}\right) = 3e^{-2x},$$

skąd po skróceniu przez e^{-2x} otrzymujemy $a + 2a = 3$, a więc $a = 1$. Stąd

$$y_{on} = y_{oj} + y_{sn} = Ce^x + e^{-2x}.$$

Przykład (2)

Niech

$$y - y' = \sin 2x.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Przykład (2)

Niech

$$y - y' = \sin 2x.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = a\cos 2x + b\sin 2x$.
Podstawiamy

$$a\cos 2x + b\sin 2x + a\sin 2x - b\cos 2x = \sin 2x.$$

Wtedy

$$a - b = 0 \implies a = b,$$
$$a + b = 1 \implies a = b = 0.5,$$

Przykład (2)

Niech

$$y - y' = \sin 2x.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^x$.

Szukamy $y_{sn} = a\cos 2x + b\sin 2x$.
Podstawiamy

$$a\cos 2x + b\sin 2x + a\sin 2x - b\cos 2x = \sin 2x.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} a - b = 0 &\implies a = b, \\ a + b = 1 &\implies a = b = 0.5, \end{aligned}$$

czyli

$$y = Ce^x + 0.5\sin 2x + 0.5\cos 2x.$$

Idea metody uzmienniania stałej

Gdy $q(x)$ nie jest stałą, stosuje się metodę zwaną „metodą uzmienniania stałej".
Polega ona na tym, że w rozwiązaniu ogólnym równania jednorodnego y_{oj}, zastępuje się stałą C funkcją $C(x)$ i podstawia do równania niejednorodnego

$$y' + p(x)\, y = q(x),$$

skąd wyznacza się $C(x)$.

Przykład (1)

Niech

$$y - y' = 3e^{-2x}.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^{x}$.
Przyjmiemy więc, że

$$y_{on} = C(x)\, e^{x}$$

i podstawimy do równania niejednorodnego.

Przykład (1) c.d.

Najpierw obliczamy

$$y'_{on} = C'(x)\, e^x + C(x)\, e^x,$$

skąd po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$C(x)\, e^x - C'(x)\, e^x - C(x)\, e^x = 3e^{-2x}$$

oraz

$$C'(x) = -3e^{-3x} \implies C(x) = e^{-3x} + C.$$

Stąd

$$y_{on} = \left(e^{-3x} + C\right) e^x = e^{-2x} + Ce^x.$$

Przykład (2)

Niech

$$y - y' = \sin 2x.$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y_{oj} = Ce^{x}$.

$$y'_{on} = C\left(x\right)e^{x} - C'\left(x\right)e^{x} - C\left(x\right)e^{x} = -C'\left(x\right)e^{x},$$

$$C\left(x\right) = -\frac{e^{-x}}{5}\left(\sin 2x - 2\cos 2x\right) + C,$$

skąd

$$y_{on} = \left(-\frac{e^{-x}}{5}\left(\sin 2x - 2\cos 2x\right) + C\right)e^{x}.$$

Przykład (3)

Niech

$$y' - xy = x.$$

Odpowiadającym temu równaniu równaniem jednorodnym jest

$$y' - xy = 0.$$

którego rozwiązaniem jest $y_{oj} = Ce^{x^2/2}$.
Przyjmiemy więc, że

$$y_{on} = C(x)\, e^{x^2/2}$$

i podstawimy do równania niejednorodnego.

Przykład (3) c.d.

Najpierw obliczamy

$$y'_{on} = C'(x)\, e^{x^2/2} + xC(x)\, e^{x^2/2}$$

skąd po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$C'(x)\, e^{x^2/2} + xC(x)\, e^{x^2/2} - xC(x)\, e^{x^2/2} = x.$$

Przykład (3) c.d.

Najpierw obliczamy

$$y'_{on} = C'(x)\, e^{x^2/2} + xC(x)\, e^{x^2/2}$$

skąd po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$C'(x)\, e^{x^2/2} + xC(x)\, e^{x^2/2} - xC(x)\, e^{x^2/2} = x.$$

Po skróceniu:

$$C'(x) = xe^{-x^2/2},$$

skąd

$$C(x) = \int xe^{-x^2}\, dx.$$

Przykład (3) c.d.

Najpierw obliczamy

$$y'_{on} = C'(x)\, e^{x^2/2} + xC(x)\, e^{x^2/2}$$

skąd po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$C'(x)\, e^{x^2/2} + xC(x)\, e^{x^2/2} - xC(x)\, e^{x^2/2} = x.$$

Po skróceniu:

$$C'(x) = xe^{-x^2/2},$$

skąd

$$C(x) = \int xe^{-x^2}\, dx.$$

Całkę tę obliczamy przez podstawienie: $C(x) = -e^{-x^2/2} + C$.

$$y_{on} = \left(C - e^{-x^2/2}\right) e^{x^2/2} = Ce^{x^2/2} - 1.$$