Matematyka II

Wykład 5
Całki: dalsze własności i zastosowania
Funkcje wielu zmiennych

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Dzień liczby π

Dzisiaj święto – dzień liczby π.

Według amerykańskich zwyczajów, datę 14 marca 2023 zapisuje się jako **3.14.2024**.

Dzień liczby π

Dzisiaj święto – dzień liczby π.

Według amerykańskich zwyczajów, datę 14 marca 2023 zapisuje się jako **3.14.2024**.

W skrócie $3.14 \approx \pi$.

Dzień liczby π

Dzisiaj święto – dzień liczby π.

Według amerykańskich zwyczajów, datę 14 marca 2023 zapisuje się jako **3.14.2024**.

W skrócie $3.14 \approx \pi$.

Wiersz Wisławy Szymborskiej Liczba Pi.

Definicja

Niech

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)\,.$$

Zakładany, że

$$\max\left(x_k - x_{k-1}\right) \to 0.$$

Definicja

Niech

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)\,.$$

Zakładany, że

$$\max(x_k - x_{k-1}) \to 0.$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(x_k^*)\,.$$

Jeśli prawa strona wzoru nie zależy od wyboru punktów x_k i x_k^*, to funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna.
Jest całka Riemanna.

Suma całkowa

Jeśli $\max\left(x_k - x_{k-1}\right)$ jest dostatecznie małe, to

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - x_{k-1}\right) f\left(x_k^*\right) \approx \int_a^b f(x)\, dx.$$

Suma całkowa

Jeśli $\max(x_k - x_{k-1})$ jest dostatecznie małe, to

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(x_k^*) \approx \int_a^b f(x)\, dx.$$

W przypadku punktów równoodległych mamy $h = (b-a)/n$, czyli

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

Można też przyjąć $x_k^* = x_k - h/2$.

Przykład

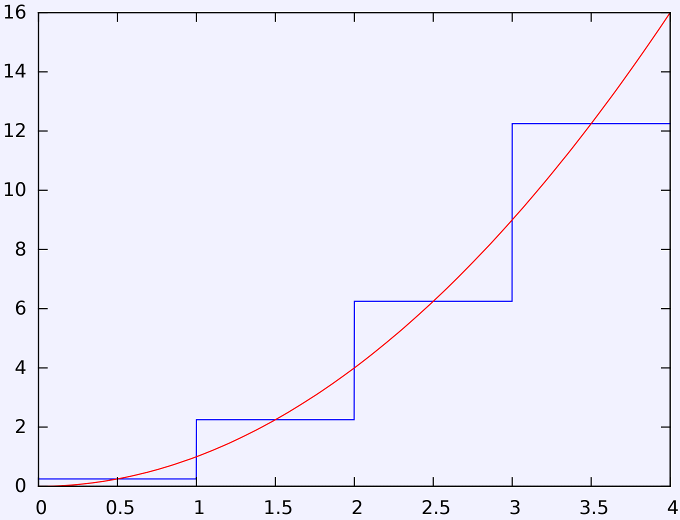
Niech $f(x) = x^2$. Wartość dokładna całki

$$\int_0^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = 64/3 = 21.33\ldots$$

Przybliżenie dla $n = 4$:

$$\int_0^4 x^2\,dx \approx 0.25 + 2.25 + 6.25 + 12.25 = 21.$$

Przykład c.d.



Twierdzenia o całce Riemanna

Twierdzenie

Jeśli funkcja ograniczona na przedziale domkniętym posiada w tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości, to jest w nim całkowalna w sensie Riemanna.

Twierdzenia o całce Riemanna

Twierdzenie

Jeśli funkcja ograniczona na przedziale domkniętym posiada w tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości, to jest w nim całkowalna w sensie Riemanna.

Twierdzenie

Jeśli funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym, to jest w tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.

Funkcja pierwotna i całka Riemanna

Twierdzenie (Newtona–Leibniza)

Jeśli F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$, to wówczas

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Objętość bryły obrotowej

Krzywą, będącą wykresem funkcji $f(x) > 0$ w przedziale $[a, b]$ obracamy wokół osi OX.
„Plasterek" grubości Δx ma objętość

$$\Delta V \approx \pi f^2(x) \Delta x.$$

Objętość bryły obrotowej

Krzywą, będącą wykresem funkcji $f(x) > 0$ w przedziale $[a, b]$ obracamy wokół osi OX.
„Plasterek” grubości Δx ma objętość

$$\Delta V \approx \pi f^2(x)\,\Delta x.$$

Stąd

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Powierzchnia bryły obrotowej

Przy tych samych założeniach, powierzchnia „plasterka”, czyli powierzchnia stożka ściętego:

$$\Delta S \approx 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x.$$

Powierzchnia bryły obrotowej

Przy tych samych założeniach, powierzchnia „plasterka”, czyli powierzchnia stożka ściętego:

$$\Delta S \approx 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\Delta x.$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Wzory rekurencyjne

$$\int \sin^n x \, dx = \frac{(\sin^{n-1} x)(\cos x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{(\cos^{n-1} x)(\sin x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

Objętość kuli

Niech $r = 1$.

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Obracamy $f(x)$ wokół osi OX.
Wtedy

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) \, dx$$

Podstawiamy $x = \sin t$, $dx = \cos x \, dx$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \, dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right) \cos t \, dt$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t \, dt = \frac{2\pi}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2\pi}{3} \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3}.$$

Powierzchnie i warstwice

Funkcja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jest funkcją rzeczywistą n zmiennych rzeczywistych, gdy

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

gdzie

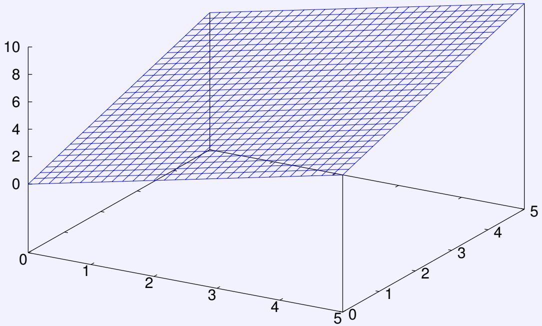
$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ razy}}.$$

Powierzchnie i warstwice c.d.

Dla przypadku $n = 2$, czyli dla funkcji dwóch zmiennych, zamiast (x_1, x_2) pisze się zwykle (x, y) i $f(x, y)$, a dla $n = 3$, czyli funkcji trzech zmiennych, zamiast (x_1, x_2, x_3), pisze się zwykle (x, y, z) i $f(x, y, z)$. Zauważmy, że $\mathbb{R}^2$ jest płaszczyzną, a więc wykresem każdej funkcji $f(x, y)$ jest powierzchnia w przestrzeni trójwymiarowej.

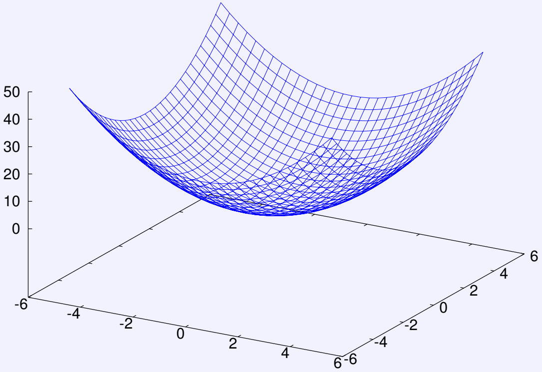
Płaszczyzna

Wykresem funkcji $z = x + y$ jest płaszczyzna.



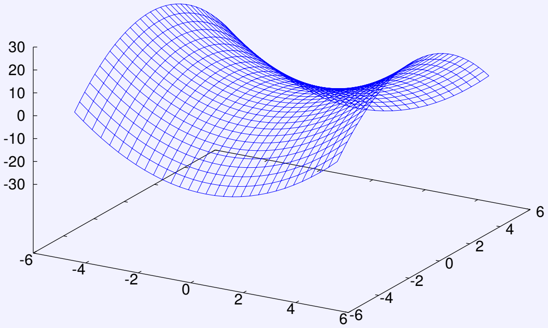
Paraboloida obrotowa

Wykresem funkcji $z = x^2 + y^2$ jest paraboloida obrotowa.

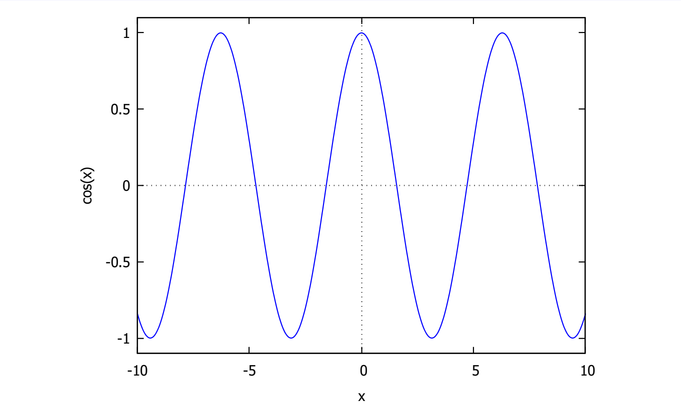


Hiperboloida jednopowłokowa

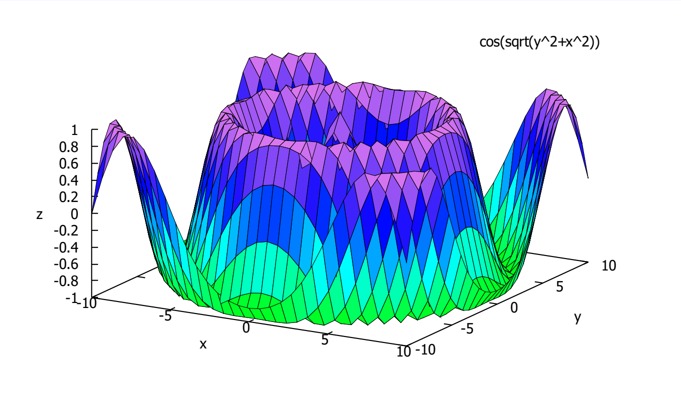
Wykresem funkcji $z = x^2 - y^2$ jest hiperboloida jednopowłokowa



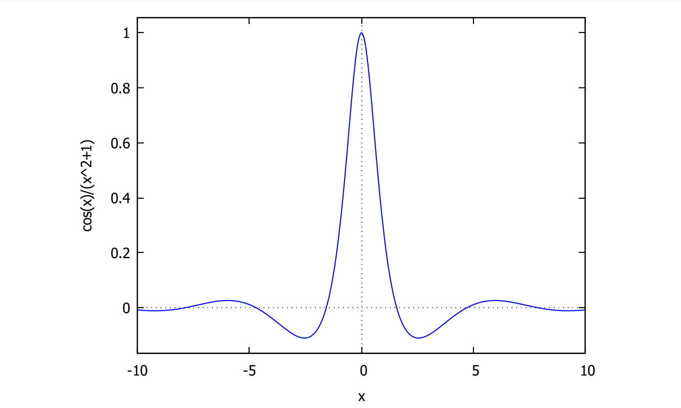
Powierzchnie obrotowe 1



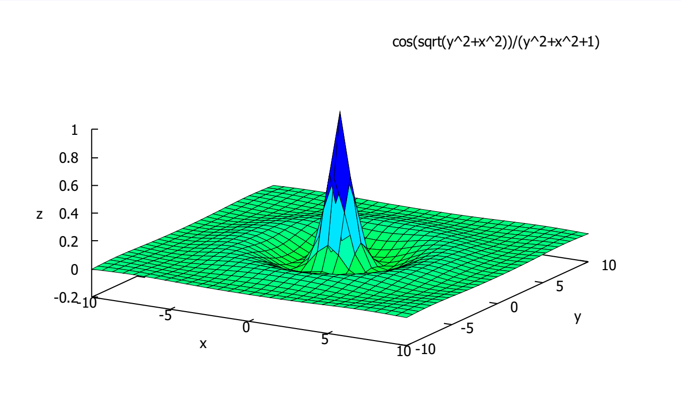
Powierzchnie obrotowe 1 c.d.



Powierzchnie obrotowe 2



Powierzchnie obrotowe 2 c.d.



Warstwica

Jeśli $z = f(x, y)$ i ustalimy wartość $z_0 = z$, to otrzymujemy równania

$$f(x, y) = z_0 = \text{const.}$$

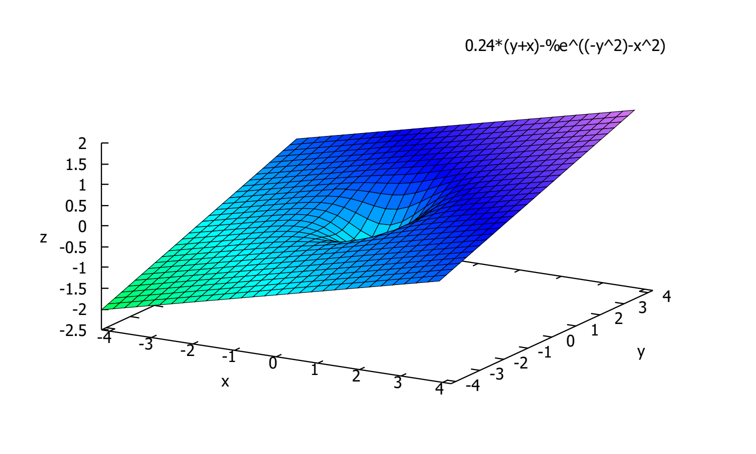
Równanie to jest równaniem krzywej, zwanej warstwicą. Warstwica powstaje przez przecięcie wykresu funkcji (powierzchni) $f(x, y)$ płaszczyzną $z = z_0$.

Przykład warstwicy

Niech $f(x, y) = x^2 + y^2$, której wykres jest pokazany na rysunku. Jeśli przyjmiemy $z_0 = r^2$, to otrzymamy równanie $x^2 + y^2 = r^2$. Jest to równanie okręgu o promieniu r. Oznacza to, że warstwice są okręgami. Jeżeli przyjmiemy $y = 0$, to wykres funkcji $z = f(x, 0) = x^2$ jest parabolą leżącą na płaszczyźnie OXZ, a jeśli $x = 0$, to wykres funkcji $z = f(0, y) = y^2$ jest parabolą leżącą na płaszczyźnie OYZ. Stąd nazwa *paraboloida obrotowa*.

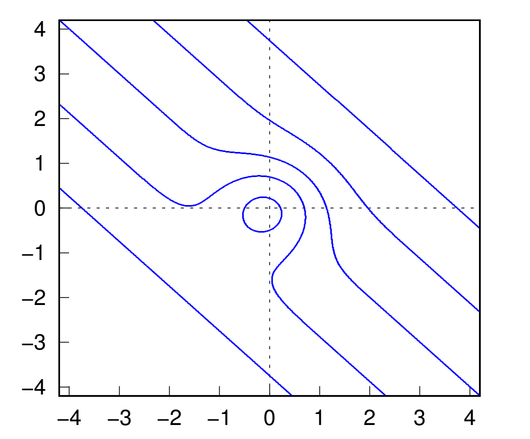
Przykład

$$f(x,y) = 0.24\,(x+y) - \exp\left(-x^2 - y^2\right).$$



Przykład – warstwice

$$f(x,y) = 0.24\,(x+y) - exp\left(-x^2 - y^2\right).$$
$$z = 0.90, 0.45, 0.00, -0.45, -0.90.$$



Pochodne cząstkowe

Niech $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ będzie określona w $D \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pochodna cząstkowa po x w punkcie p_0 jest to granica ilorazu różnicowego, gdzie $p_0 = (x_0, y_0) \in D$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{p_0} = f_x(x_0, y_0) = f_x(p_0).$$

Analogicznie określa się pochodną cząstkową po y.

Przykład pochodnych cząstkowych

Jeśli $f(x, y) = e^{xy}$, to

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}.$$

Jeśli $f(x, y) = e^{x/y}$, to

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}e^{x/y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}e^{x/y}.$$

Definicja ekstremum

Funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$ maksimum, jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(p_0) \geq f(p)$ dla $\|p - p_0\| < \delta$, $p_0 \neq p = (x, y) \in D$, gdzie

$$\|p - p_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

jest odległością punktu p od punktu p_0.

Warunek konieczny

Twierdzenie

Funkcja różniczkowalna w $D \subseteq \mathbb{R}^2$ może mieć ekstremum tylko w takim $p_0 \in D$, w którym

$$f_x(p_0) = 0 \textit{ oraz } f_y(p_0) = 0.$$

Drugie pochodne cząstkowe

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,,\\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,,\\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,,\\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,.
\end{aligned}
$$

$f_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – drugie pochodne mieszane.
Zwykle (ścisłe warunki pominiemy), jest $f_{xy} = f_{yx}$.

Przykład drugich pochodnych cząstkowych

$$z = f(x, y) = \sin\left(x + y^2\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\left(x + y^2\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x + y^2\right).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin\left(x + y^2\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\cos\left(x + y^2\right) - 4y^2\sin\left(x + y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2y\sin\left(x + y^2\right).$$

Warunek dostateczny

Twierdzenie

Jeśli f ma drugie pochodne cząstkowe w D, w punkcie p_0 spełnia warunek konieczny oraz wyznacznik $w = w(p) > 0$:

$$w = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad f_{xy} = f_{yx},$$

to f ma w punkcie p_0

- *maksimum, gdy $f_{xx}(p_0) < 0$,*
- *minimum, gdy $f_{xx}(p_0) > 0$.*

Gdy $w(p_0) < 0$, to w p_0 nie ma ekstremum.

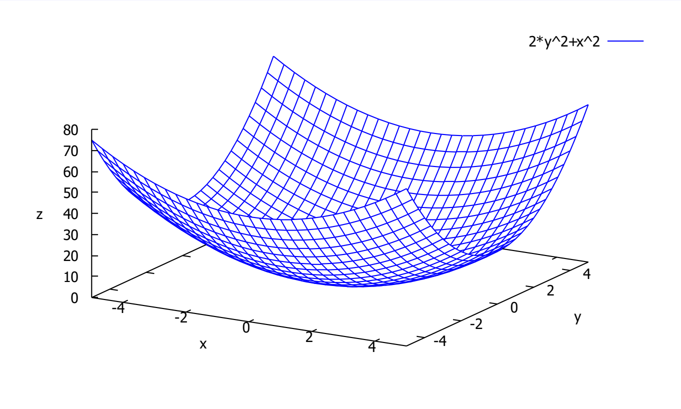
Przykład

Niech $f(x, y) = x^2 + \lambda y^2$. Wtedy $f_x = 2x$, $f_y = 2\lambda y$. Drugie pochodne: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2\lambda$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$.

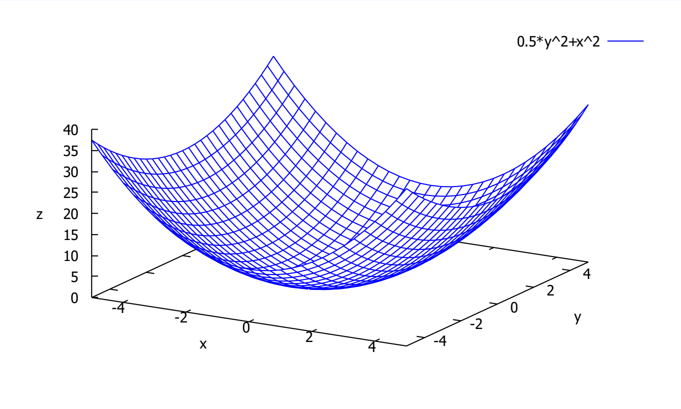
$$w = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda.$$

Ponieważ $f_{xx} = 2 > 0$, to dla $\lambda > 0$ jest minimum w punkcie $(0, 0)$, a dla $\lambda < 0$ nie ma ekstremum.

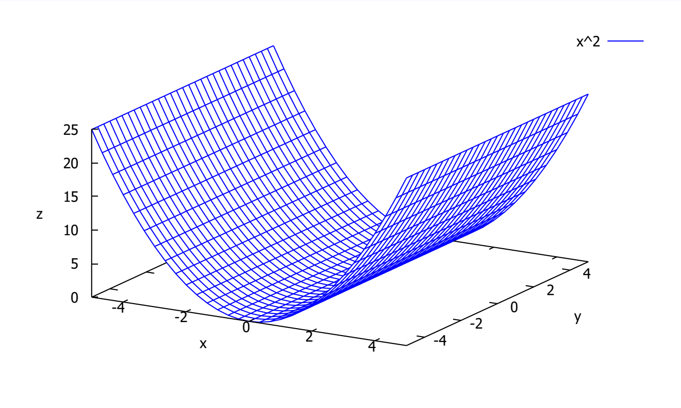
Przykład, $\lambda = 2$



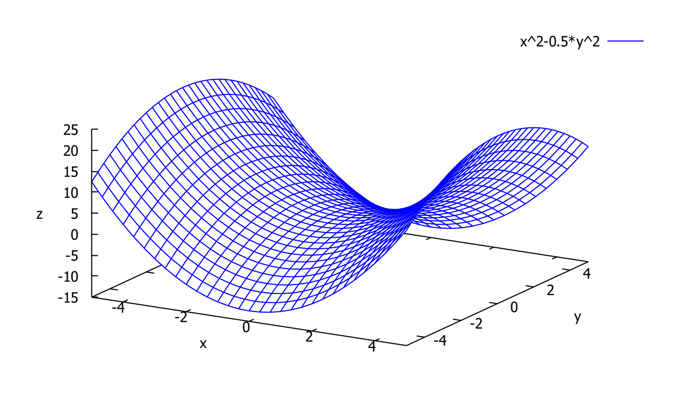
Przykład, $\lambda = 0.5$



Przykład, $\lambda = 0$



Przykład, $\lambda = -0.5$



Przykład, $\lambda = -2$