Matematyka II

Wykład 4

Całki niewłaściwe i szeregi

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Definicja

Całka niewłaściwa w przedziale nieskończonym (a,∞) funkcji $f(x)$ to granica:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)\,dx$$

o ile ta granica istnieje.
Jeśli ta granica nie istnieje, to całka jest rozbieżna.

Definicja

Całka niewłaściwa w przedziale nieskończonym (a, ∞) funkcji $f(x)$ to granica:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^{t} f(x)\,dx$$

o ile ta granica istnieje.
Jeśli ta granica nie istnieje, to całka jest rozbieżna.

Jest to całka niewłaściwa pierwszego rodzaju.

Definicja c.d.

Niech α będzie dowolną liczbą, tzn. $-\infty < a < \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

o ile istnieją obie całki po prawej stronie równania.

Przykład (1)

$$\int_1^t x^\alpha \, dx = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - 1 & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ \ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$

Przykład (1)

$$\int_1^t x^\alpha \, dx = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - 1 & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ \ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$

Jeśli $\alpha < -1$, to

$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \frac{-1}{\alpha+1},$$

natomiast dla $a \geq -1$ całka jest rozbieżna.

Przykład (1)

$$\int_1^t x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - 1 & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ \ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$

Jeśli $\alpha < -1$, to

$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \frac{-1}{\alpha+1},$$

natomiast dla $a \geq -1$ całka jest rozbieżna.

Przykład do przykładu (1):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = 1.$$

Przykład (2)

Niech $\lambda > 0$.

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Przykład (2)

Niech $\lambda > 0$.

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$\left[\text{ podstawienie } z = -\lambda x,\ dz = -\lambda dx \ \right]$

Przykład (2)

Niech $\lambda > 0$.

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$\left[\text{ podstawienie } z = -\lambda x,\ dz = -\lambda dx \ \right]$

$$= -\int_0^{-\lambda t} e^z\, dz = -e^z\Big|_0^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t} + 1 \to 1,$$

dla $t \to \infty$.

Przykład (2)

Niech $\lambda > 0$.

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$\left[\text{ podstawienie } z = -\lambda x,\ dz = -\lambda dx \ \right]$

$$= -\int_0^{-\lambda t} e^z \, dz = -e^z \Big|_0^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t} + 1 \to 1,$$

dla $t \to \infty$.

Wniosek: dla dowolnego $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Przykład (3)

Niech $\lambda > 0$. Obliczamy

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Przykład (3)

Niech $\lambda > 0$. Obliczamy

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Przez części

$$\int x\lambda e^{-\lambda x} dx = \int x\left(-e^{-\lambda x}\right)' dx = -xe^{-\lambda x} - \int x'\left(-e^{-\lambda x}\right)$$
$$= -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}.$$

Przykład (3)

Niech $\lambda > 0$. Obliczamy

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

Przez części

$$\int x\lambda e^{-\lambda x}dx = \int x\left(-e^{-\lambda x}\right)' dx = -xe^{-\lambda x} - \int x'\left(-e^{-\lambda x}\right)$$
$$= -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}.$$

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Przykład (4)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx.$$

Przykład (4)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx.$$

Wiadomo (wykład 2), że

$$\int xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Przykład (4)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx.$$

Wiadomo (wykład 2), że

$$\int xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Stąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0.$$

Przykład (5)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Przykład (5)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \,.$$

Ponieważ całka nieoznaczona

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + c,$$

to

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \,.$$

Przykład (5)

Obliczamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Ponieważ całka nieoznaczona

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + c,$$

to

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Wniosek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\,.$$

Przykład (6)

Próbujemy obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2}\,.$$

Przykład (6)

Próbujemy obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2}\,.$$

Całka nieoznaczona

$$\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \ln\left(1+x^2\right) + c.$$

Przykład (6)

Próbujemy obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

Całka nieoznaczona

$$\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \ln\left(1+x^2\right) + c.$$

Co prawda

$$\int_{-t}^{t} \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \ln\left(1+x^2\right)\Big|_{-t}^{t} = \ln\left(1+t^2\right) - \ln\left(1+t^2\right) = 0.$$

Przykład (6) c.d.

Nie istnieją jednakże całki (są rozbieżne)

$$\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

bo $\ln\left(1+t^2\right) \to \infty$ dla $t \to \pm\infty$.

Przykład (6) c.d.

Nie istnieją jednakże całki (są rozbieżne)

$$\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

bo $\ln\left(1+t^2\right) \to \infty$ dla $t \to \pm\infty$.
Wniosek: całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

nie istnieje (jest rozbieżna).

Definicja

Załóżmy, że $|f(x)| < M$ określona jest w przedziale $[a, t)$, $t < b$, dla pewnego M, czyli jest w tym przedziale skończona oraz że istnieje całka

$$\int_a^t f(x)\,dx.$$

Załóżmy dalej, że

$$\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty.$$

Definicja c.d.

Całka niewłaściwa w przedziale $[a, b)$ to granica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx$$

o ile ta granica istnieje.
Jeśli ta granica nie istnieje, to całka jest rozbieżna.

Definicja c.d.

Całka niewłaściwa w przedziale $[a, b)$ to granica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx$$

o ile ta granica istnieje.
Jeśli ta granica nie istnieje, to całka jest rozbieżna.
Analogicznie definiuje się całkę, gdy $|f(x)| < M$ określona jest w przedziale $[t, b)$, $t > a$, dla pewnego M, czyli jest w tym przedziale skończona oraz że istnieje całka

$$\int_t^b f(x)\,dx,$$

gdy $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Przykład (1)

$$\int_t^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ -\ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$

Przykład (1)

$$\int_t^1 x^\alpha\,dx = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{dla } \alpha \neq -1, \\ -\ln t & \text{dla } \alpha = -1. \end{cases}$$

Jeśli $\alpha > -1$, to

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1},$$

natomiast dla $\alpha \leq -1$ całka jest rozbieżna.

Przykład (2)

$$\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty.$$

Całka

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$$

jest rozbieżna, bo

$$\int_0^t \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x|\Big|_0^t = \ln \cos t$$

bo $\ln \cos t \to -\infty$ dla $t \to \pi/2$.

Obliczenie przez rozwinięcie w szereg

Chcemy obliczyć całkę

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

ale funkcja pierwotna do $f(x)$ nie jest elementarna albo jest trudna do obliczenia.

Obliczenie przez rozwinięcie w szereg

Chcemy obliczyć całkę

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

ale funkcja pierwotna do $f(x)$ nie jest elementarna albo jest trudna do obliczenia.

Można ją rozwinąć w szereg Maclaurina w przedziale $(-r, r)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Obliczenie przez rozwinięcie w szereg c.d.

Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\Big|_a^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

Przykład (1a)

Bardzo ważna całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516.$$

Przykład (1a)

Bardzo ważna całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Przykład (1a)

Bardzo ważna całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Przykład (1a)

Bardzo ważna całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \dots$$

Przykład (1b)

Całkujemy wyraz po wyrazie:

$$\int \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} .$$

Przykład (1b)

Całkujemy wyraz po wyrazie:

$$\int \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} .$$

$$\int_0^t \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} .$$

Przykład (1c)

Dla dostatecznie dużych $t = T$ i dostatecznie dużych $n = N$ otrzymamy

$$\int_0^T e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \, T^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Wg Wofram Alpha:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 0.886226925452757 9.$$

Przykład (1c)

Dla dostatecznie dużych $t = T$ i dostatecznie dużych $n = N$ otrzymamy

$$\int_0^T e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \, T^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Wg Wofram Alpha:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 0.886226925452757 9.$$

Jeśli $T = 4.0$ oraz $N = 50$ otrzymujemy

$$\int_0^T e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \, T^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} = 0.886227405763507 7 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Przykład (2a)

Obliczmy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Przykład (2a)

Obliczmy

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Czy ta całka jest zbieżna?

Przykład (2a)

Obliczmy

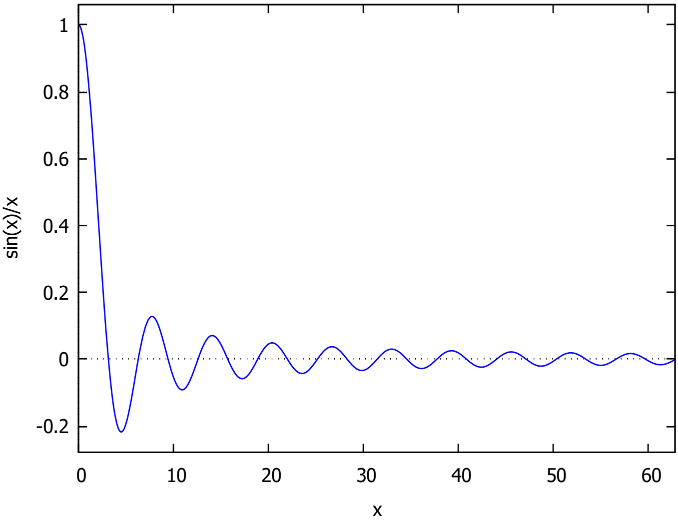
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Czy ta całka jest zbieżna?

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

jest szeregiem naprzemiennym o wyrazach dążących do zera.

Przykład (2b)



Przykład (2c)

Ponieważ

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)\,!}$$

to

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

Przykład (2c)

Ponieważ

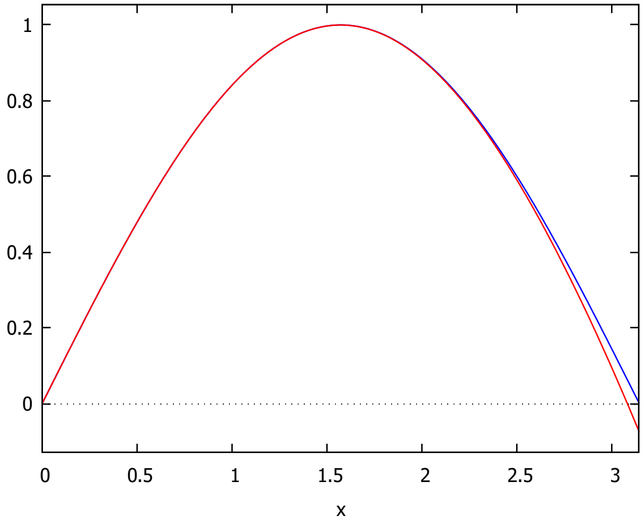
$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)\,!}$$

to

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

Złe przybliżenie dla $x > \pi$.

Przykład (2d)



Przykład (2e)

Ponieważ

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)\,!}}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i+1)\,!}$$

to

$$\frac{\sin x}{x} \approx x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}$$

Przykład (2e)

Ponieważ

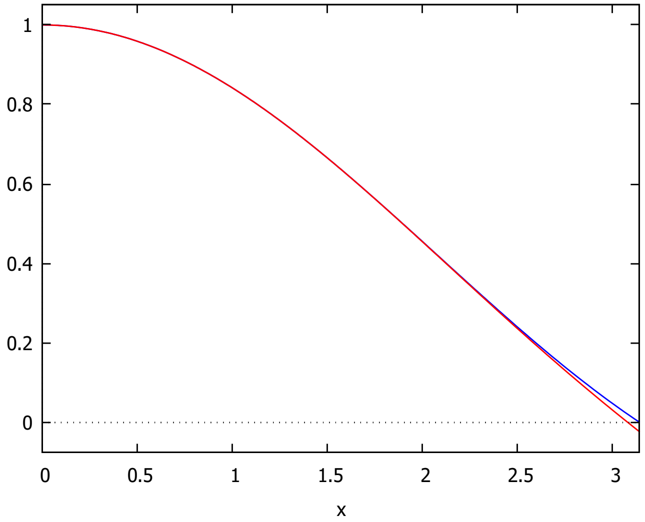
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)\,!}}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i+1)\,!}$$

to

$$\frac{\sin x}{x} \approx x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}$$

Złe przybliżenie dla $x > \pi$.

Przykład (2f)



Przykład (2g)

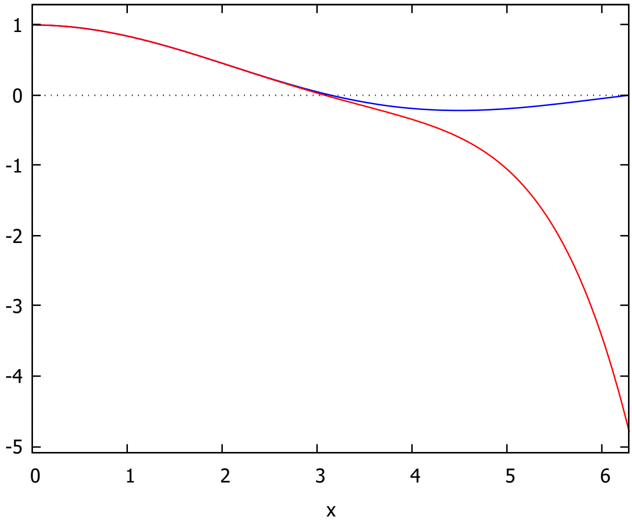
Całkujemy:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i+1)\,!}\, dx$$

Błąd!

Dla kolejnych przedziałów $[k\pi, (k+1)\,\pi]$ muszą być kolejne rozwinięcia w szereg Taylora.

Przykład (2h)



Kryterium całkowe

Niech $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ – funkcja dodatnia i malejąca, $a_n = f(n)$.

Twierdzenie (Maclaurina-Cauchy'ego)

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Przykład (1)

Szereg harmoniczny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

jest zbieżny dla $s > 1$, bo wtedy całka

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \int_1^{\infty} s^{-s}\, dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1}$$

jest zbieżna.

Przykład (2)

Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^s}$$

jest zbieżny dla $s > 1$, bo wtedy całka

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\,(\ln x)^s}\,dx$$

jest zbieżna.

Przykład (2)

Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$$

jest zbieżny dla $s > 1$, bo wtedy całka

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^s}\, dx$$

jest zbieżna.
Całkę tę obliczamy przez podstawienie

$$t = \ln x, \quad dt = \frac{dx}{x}$$

– zadanie na ćwiczenia.