Matematyka II

Wykład 3
Całki oznaczone

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Definicja całki oznaczonej

Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ w granicach od a do b jest liczbą określoną wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$.

Definicja całki oznaczonej

Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ w granicach od a do b jest liczbą określoną wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$. Liczba a nazywa się dolną, a liczba b – górną granicą całkowania.

Definicja całki oznaczonej

Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ w granicach od a do b jest liczbą określoną wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$. Liczba a nazywa się dolną, a liczba b – górną granicą całkowania.

Przyjmuje się wygodne oznaczenie:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Całka nieoznaczona i oznaczona

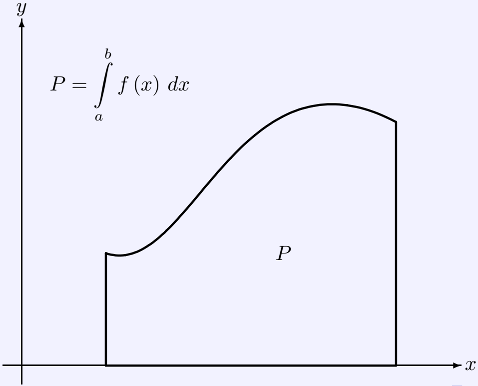
Zasadnicza różnica między całką nieoznaczoną a oznaczoną:

Uwaga

- Całka nieoznaczona jest funkcją.
- Całka oznaczona jest liczbą.

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Jeśli $a < b$ i $f(x) > 0$, to $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ jest polem P pod wykresem funkcji $f(x)$ nad osią OX, pomiędzy prostymi prostopadłymi do tej osi, wystawionymi w punktach a i b.



Interpretacja geometryczna całki oznaczonej c.d.

Jeśli $a < b$ i $f(x) < 0$, to $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jest minus polem P nad wykresem funkcji $f(x)$ pod osią OX, pomiędzy prostymi prostopadłymi do tej osi, wystawionymi w punktach a i b.

Najprostszy przykład

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

– pole trójkąta,

Najprostszy przykład

$$\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

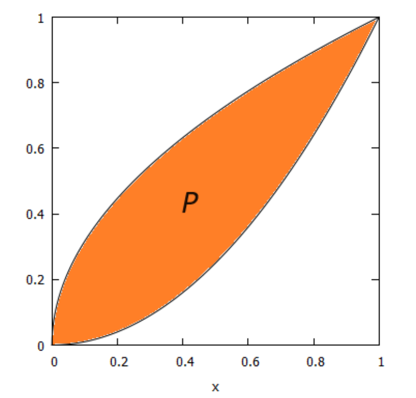
– pole trójkąta,

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

– pole wykresem wielomianu x^n.

Obliczanie pola (1)

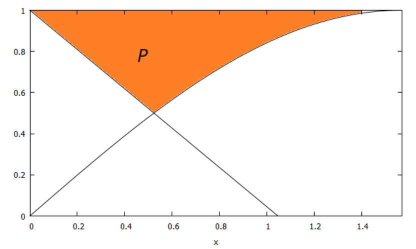
Pole ograniczone krzywymi o równaniach $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.



$$P = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Obliczanie pola (2)

Pole ograniczone krzywymi o równaniach $y = \sin x$, $y = 1 - 3x/\pi$, $y = 1$.



$$P = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi)\, dx - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\, dx.$$

Obliczanie pola (2) c.d.

$$\int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi)\, dx = x\Big|_0^{\pi/6} - \frac{3}{2\pi} x^2\Big|_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2\pi}\frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$$

Obliczanie pola (2) c.d.

$$\int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi)\, dx = x\Big|_0^{\pi/6} - \frac{3}{2\pi}\, x^2\Big|_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2\pi}\,\frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Obliczanie pola (2) c.d.

$$\int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi)\, dx = x\Big|_0^{\pi/6} - \frac{3}{2\pi} x^2\Big|_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2\pi}\frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$P = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.3120718413117338.$$

Obliczanie pola (2) – uwaga

Pierwsza całka czysto geometrycznie:

$$\int_0^{\pi/6} (1 - 3x/\pi)\,dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8}\,.$$

Wartość średnia całkowa

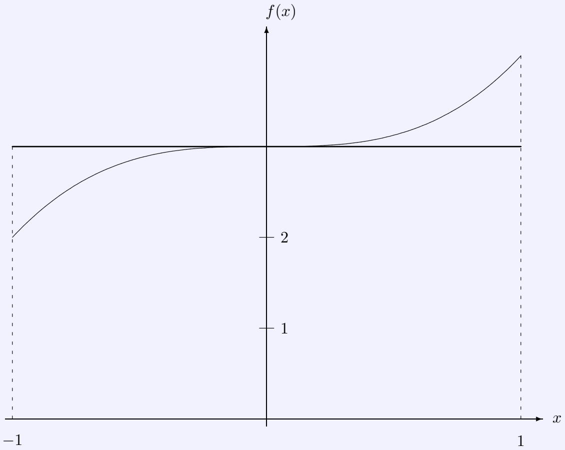
Twierdzenie

Jeśli f jest funkcją ciągła, to istnieje $c \in [a, b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

Wartość $f(c) = f_r$ występująca w twierdzeniu nazywa się średnią całkową.
Jest to dla funkcji $f(x) \geq 0$ wysokość prostokąta o podstawie długości $b-a$ i polu równym polu pod wykresem funkcji $f(x)$.

Wartość średnia całkowa – ilustracja



Całka oznaczona i funkcja pierwotna

Funkcja $g(x)$ określona za pomocą całki oznaczonej:

$$g(x) = \int_a^x f(\tau)\, d\tau = F(x) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest pewną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Całka oznaczona i funkcja pierwotna

Funkcja $g(x)$ określona za pomocą całki oznaczonej:

$$g(x) = \int\limits_a^x f(\tau)\, d\tau = F(x) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest pewną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Wniosek:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(\tau)\, d\tau.$$

Całka oznaczona i funkcja pierwotna

Funkcja $g(x)$ określona za pomocą całki oznaczonej:

$$g(x) = \int_a^x f(\tau)\, d\tau = F(x) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest pewną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Wniosek:

$$F(x) = \int_a^x f(\tau)\, d\tau.$$

Można więc przyjąć, że $c = -F(a)$.

Warunek początkowy

Jeśli

$$g\left(t\right)=\int\limits_{t_0}^{t} f\left(x\right)dx,$$

to

$$g\left(t_0\right)=0.$$

Warunek początkowy

Jeśli

$$g\left(t\right)=\int_{t_0}^{t}f\left(x\right)dx,$$

to

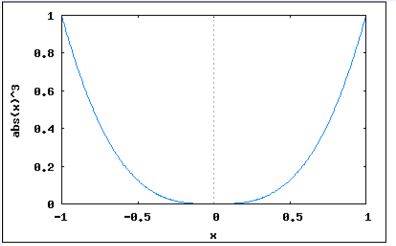
$$g\left(t_0\right)=0.$$

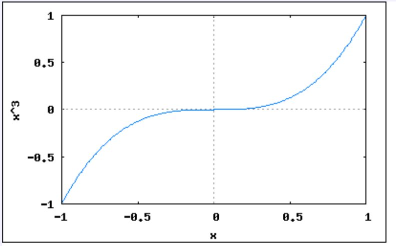
Jeśli t jest czasem, to warunek $g\left(t_0\right)$ jest warunkiem początkowym – zaczynamy w chwili t_0.

Funkcje parzyste i nieparzyste

Definicja

Funkcja f jest parzysta, gdy $f(x) = f(-x)$.
Funkcja f jest nieparzysta, gdy $f(x) = -f(-x)$.





Całki funkcji parzystych i nieparzystych.

Twierdzenie

Jeśli f jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Jeśli f jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Suma i mnożenie przez stałą

Podobnie jak dla całki nieoznaczonej

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx.$$

Suma i mnożenie przez stałą

Podobnie jak dla całki nieoznaczonej

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ostrzeżenie!

Nie istnieje wzór na całkę iloczynu funkcji.

Podział przedziału całkowania

Specyficzne dla całek oznaczonych jest natomiast

Twierdzenie

Jeśli $a < b < c$, *to*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Droga, prędkość, przyspieszenie (1)

Oznaczenia:

- t – czas,
- $s(t)$ – droga,
- $v(t)$ – prędkość,
- $a(t)$ – przyspieszenie.

Droga, prędkość, przyspieszenie (1)

Oznaczenia:

- t – czas,
- $s(t)$ – droga,
- $v(t)$ – prędkość,
- $a(t)$ – przyspieszenie.

Wiadomo, że

- $v(t) = s'(t)$,
- $a(t) = v'(t)$,

o ile odpowiednie pochodne istnieją.

Droga, prędkość, przyspieszenie (2)

Wnioski:

$$v(t) = \int a(t)\,dx + c,$$
$$s(t) = \int v(t)\,dx + c,$$

z dokładnością do stałej.

Droga, prędkość, przyspieszenie (2)

Wnioski:

$$v(t) = \int a(t)\, dx + c,$$

$$s(t) = \int v(t)\, dx + c,$$

z dokładnością do stałej.

Stałą c trzeba wyznaczyć jako prędkość początkową i drogę początkową.

Droga, prędkość, przyspieszenie – przykład (1)

Załóżmy, że dla $t \geq 0$:

$$a(t) = e^{-t} + 0.1 \sin(20\pi t).$$

Wtedy prędkość:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \left(e^{-\tau} + 0.1 \sin(20\pi\tau)\right) d\tau \\ &= -e^{-\tau} + \frac{0.01}{20\pi} \cos(20\pi\tau) \Big|_0^t \\ &= -e^{-t} + \frac{0.005}{\pi} \cos(20\pi t) + 1 - \frac{0.005}{\pi}. \end{aligned}$$

Droga, prędkość, przyspieszenie – przykład (2)

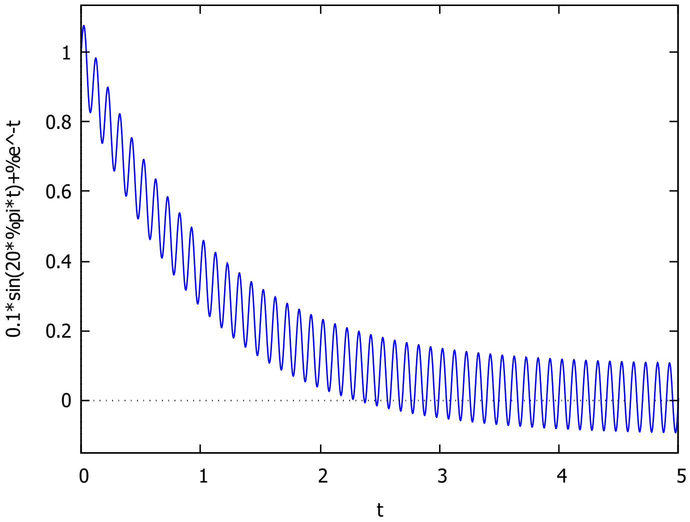
Teraz droga:

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau = \int_0^t \left(-e^{-t} + \frac{0.005}{\pi}\cos(20\pi t) + 1 - \frac{0.005}{\pi}\right) d\tau$$

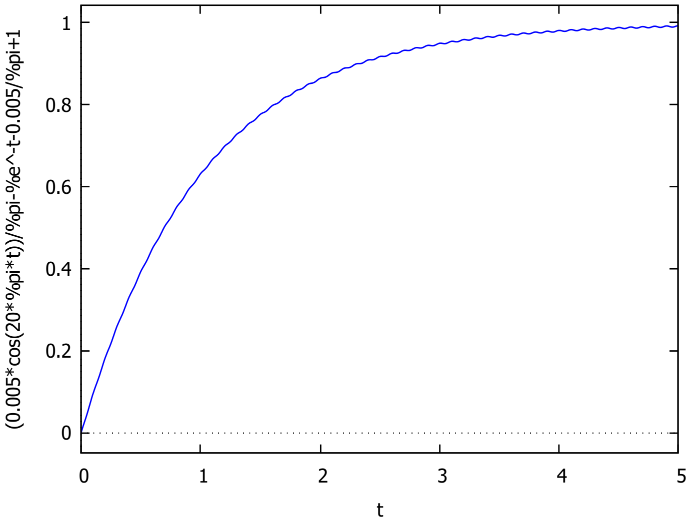
$$= e^{-\tau} - \frac{0.00025}{\pi^2}\sin(20\pi\tau) + \left(1 - \frac{0.005}{\pi}\right)\tau\Big|_0^t$$

$$\approx e^{-t} - \left(1 - \frac{0.005}{\pi}\right) t - 1.$$

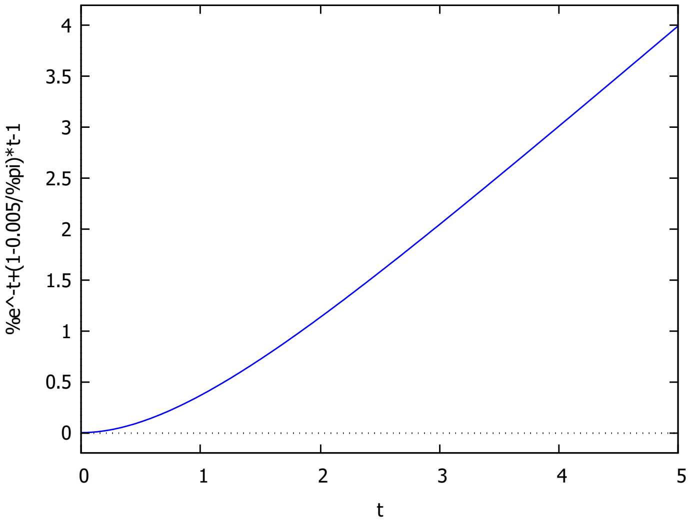
Wykres $a(t)$



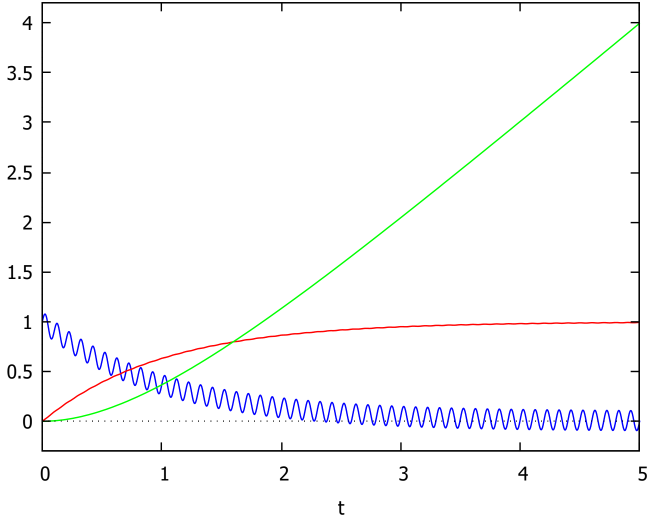
Wykres $v(t)$



Wykres $s(t)$



Wykresy



Wzór na całkowanie przez części

Ze wzoru na całkowania przez części dla całki nieoznaczonej wynika metoda całkowania przez części dla całki oznaczonej.

Twierdzenie

Jeśli f' i g' – ciągłe, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

Przykład

$$\int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e x' \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x (\ln x)' \, dx$$
$$= e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Przykład

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e x' \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\,dx$$

$$= e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Inaczej

$$F(x) = \int \ln x\,dx = x\ln x - x + c\,,$$

skąd

$$\int_1^e \ln x\,dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^e = e\cdot(1-1) - 1\cdot(0-1) = 1.$$

Wzór na całkowanie przez podstawianie

Bardziej skomplikowane jest obliczanie całek oznaczonych przez podstawianie, bo wymaga to na ogół zmian granic całkowania.

Twierdzenie

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy,$$

gdzie $y = f(x)$, *czyli*

$$\int_a^b z\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} z\,dy.$$

Przykład 1

$$I_1 = \int_0^1 x e^{x^2/2}\, dx$$

Podstawiamy $t = x^2/2$, skąd $dt = x\, dx$. Ponieważ x zmienia się od 0 do 1, to t zmienia się od 0 do $1/2$. Stąd

$$I_1 = \int_0^{1/2} e^t\, dt = e^t \Big|_0^{1/2} = \sqrt{e} - 1.$$

Przykład 2

$$I_2 = \int_0^2 x e^{x^2/2}\, dx.$$

Podstawiamy $t = x^2/2$, skąd $dt = x\, dx$. Ponieważ x zmienia się od 0 do 2, to t zmienia się od 0 do 2. Stąd

$$I_2 = \int_0^2 e^t\, dt = e^t \Big|_0^2 = e^2 - 1.$$

Zauważmy, że brak zmiany granicy całkowania w całce I_2 daje w rezultacie ten sam wynik co jest przypadkową zbieżnością z prawdziwą wartością całki I_2.

Przykład 3

$$I_3 = \int_0^{\ln 2} x e^{x^2/2}\, dx.$$

Podstawiamy $t = x^2/2$, skąd $dt = x\,dx$. Ponieważ x zmienia się od 0 do $\ln 2$, to t zmienia się od 0 do $\left(\ln^2 2\right)^2/2$. Stąd

$$I_3 = \int_0^{\left(\ln^2 2\right)/2} e^t\, dt = e^t \Big|_0^{\left(\ln^2 2\right)/2} = \exp\frac{\left(\ln^2 2\right)}{2} - 1 \approx 0.2715371297141405.$$

Zamiana granic całkowania

Jeżeli dolna granica całkowania jest większa od górnej, to z definicji całki oznaczonej wynika wzór

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$