Matematyka II

Wykład 2
Całki nieoznaczone

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Funkcja pierwotna

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale (a, b), być może nieskończonym.

Definicja

F jest funkcją pierwotną funkcji f, gdy $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Funkcja pierwotna

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale (a, b), być może nieskończonym.

Definicja

F jest funkcją pierwotną funkcji f, gdy $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Twierdzenie

Jeśli F i G są funkcjami pierwotnymi dla funkcji f, to

$$F(x) = G(x) + c, \qquad c = const.$$

Inaczej mówiąc, funkcja pierwotna jest określona z dokładnością do stałej.

Przykłady (1)

Oznaczenie: $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

$$f(x) = \cos x,\ F(x) = \sin x + c.$$

$$f(x) = \sin x,\ F(x) = -\cos x + c.$$

$$f(x) = e^x,\ F(x) = e^x + c.$$

$$f(x) = e^{-x},\ F(x) = -e^{-x} + c.$$

Przykłady (2)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \ F(x) = \ln|x| + c.$$

Uzasadnienie:

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{gdy } x > 0, \\ \ln(-x) & \text{gdy } < 0. \end{cases}$$

Dziedziną funkcji $\ln|x|$ jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{gdy } x > 0, \\[2ex] \dfrac{-1}{x} & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Do przemyślenia!

Całka nieoznaczona

Oznaczenie

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

gdy $F'(x) = f(x)$.

Całka nieoznaczona

Oznaczenie

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

gdy $F'(x) = f(x)$.

Wyrażenie stojące po lewej stronie wzoru nazywa się całką nieoznaczoną funkcji f po zmiennej x.

Całka nieoznaczona

Oznaczenie

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

gdy $F'(x) = f(x)$.

Wyrażenie stojące po lewej stronie wzoru nazywa się całką nieoznaczoną funkcji f po zmiennej x.
Wzory:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x),$$

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = F(x) + c$$

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$

Całkowanie a różniczkowanie

Całkowanie, to znajdowanie funkcji pierwotnej – problem odwrotny do różniczkowania.

Całkowanie a różniczkowanie

Całkowanie, to znajdowanie funkcji pierwotnej – problem odwrotny do różniczkowania.

Przykład.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

gdyż

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = (n+1)\,x^{(n+1)-1}\,\frac{1}{n+1} = x^n.$$

Różniczka

Niech f – różniczkowalna, $y = f(x)$:

$$
\begin{aligned}
dy &= f'(x)\,dx \\
df(x) &= f'(x)\,dx \\
df(x) &= \frac{dy}{dx}\,dx.
\end{aligned}
$$

Różniczka

Niech f – różniczkowalna, $y = f(x)$:

$$
\begin{aligned}
dy &= f'(x)\,dx \\
df(x) &= f'(x)\,dx \\
df(x) &= \frac{dy}{dx}\,dx.
\end{aligned}
$$

Przyrost wartości funkcji:

$$\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right).$$

Różniczka

Niech f – różniczkowalna, $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)\,dx \\ df(x) &= f'(x)\,dx \\ df(x) &= \frac{dy}{dx}\,dx. \end{aligned}$$

Przyrost wartości funkcji:

$$\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right).$$

Przybliżenie:

$$\Delta y \approx f'\left(x\right)\Delta x.$$

Różniczka

Niech f – różniczkowalna, $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)\,dx \\ df(x) &= f'(x)\,dx \\ df(x) &= \frac{dy}{dx}\,dx. \end{aligned}$$

Przyrost wartości funkcji:

$$\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right).$$

Przybliżenie:

$$\Delta y \approx f'\left(x\right)\Delta x.$$

Przypomnienie:

$$f'\left(x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Wybrane całki

Funkcja $f(x)$	Całka $\int f(x)\,dx$
0	c
$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg} x + c$

Istnienie całki nieoznaczonej

Twierdzenie

Niech f ma funkcję pierwotną w (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Wtedy istnieje tylko jedna funkcja pierwotna F taka, że $F(x_0) = y_0$.

Istnienie całki nieoznaczonej

Twierdzenie

Niech f ma funkcję pierwotną w (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Wtedy istnieje tylko jedna funkcja pierwotna F taka, że $F(x_0) = y_0$.

Twierdzenie

Każda funkcja ciągła w przedziale (a, b) ma w tym przedziale funkcję pierwotną.

Suma i mnożenie przez stałą

Zakładamy dalej, że funkcje f i g są ciągłe.

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

$$\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

Suma i mnożenie przez stałą

Zakładamy dalej, że funkcje f i g są ciągłe.

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

$$\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx.$$

Ostrzeżenie!

Nie istnieje wzór na całkę iloczynu funkcji.

Mnożenie argumentu przez stałą

Niech

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

Ponieważ

$$\frac{df(ax)}{dx} = af'(ax),$$

to

$$\int f(ax)\, dx = \frac{1}{a} F(ax) + c.$$

Przypomnienie – pochodna iloczynu

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,.$$

Przypomnienie – pochodna iloczynu

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,.$$

Wniosek:

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x) &= \int \left(f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\right) dx \\ &= \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx, \end{aligned}$$

Wzór na całkowanie przez części

Twierdzenie

Jeśli f' i g' – ciągłe, to

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

czyli

$$\int y\frac{dz}{dx}\,dx = yz - \int z\frac{dy}{dx}\,dx$$

albo

$$\int y\,dz = yz - \int z\,dy.$$

Przykład 1

$$
\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= \int x' \ln x \, dx \\
&= x \ln x - \int x (\ln x)' \, dx \\
&= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\
&= x \ln x - \int dx \\
&= x \ln x - x + c \\
&= x(\ln x - 1) + c.
\end{aligned}
$$

Przykład 2

$$
\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} (\ln x)' \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \\
&= \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c.
\end{aligned}
$$

Przykład 3 (1)

$$\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \int (\sin x)(\sin x)'\,dx$$
$$= \sin^2 x - \int (\cos x)(\sin x)\,dx$$

Przykład 3 (1)

$$\begin{aligned}\int (\sin x)(\cos x)\,dx &= \int (\sin x)(\sin x)'\,dx \\ &= \sin^2 x - \int (\cos x)(\sin x)\,dx\end{aligned}$$

$$2\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \sin^2 x + c,$$

Przykład 3 (1)

$$\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \int (\sin x)(\sin x)'\,dx$$
$$= \sin^2 x - \int (\cos x)(\sin x)\,dx$$

$$2\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \sin^2 x + c,$$

czyli

$$\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$

Przykład 3 (2)

Obliczenia *Maxima*:

```
(%i1) integrate((sin(x))*(cos(x)), x);
(%o1) -cos(x)^2/2
```

czyli

$$\int (\sin x)(\cos x)\,dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + c.$$

Czy coś poszło nie tak?

Przykład 3 (3)

Stała c jest dowolna, więc zmienimy ją na $c' = c - 1/2$.

$$\int (\sin x)(\cos x)\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c - \frac{1}{2},$$

ale

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2}.$$

Przykład 3 (3)

Stała c jest dowolna, więc zmienimy ją na $c' = c - 1/2$.

$$\int (\sin x)(\cos x)\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c - \frac{1}{2},$$

ale

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2}.$$

Wszystko się zgadza, bo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Przykład 4

$$\int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Przykład 4

$$\int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \int (e^x)' \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx.$$

Przykład 4

$$\int e^x \sin x\,dx = \int (e^x)' \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx.$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \int (e^x)' \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx.$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx.$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}.$$

Wzór na całkowanie przez podstawianie

Twierdzenie

Wzór na całkowanie przez podstawianie

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy,$$

gdzie $y = f(x)$, *czyli*

$$\int z\frac{dy}{dx}\,dx = \int z\,dy.$$

Najprostsze podstawienia

$$\int g(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int g(y)\,dy, \quad y = ax, \quad dy = a\,dx,$$

$$\int f(a+x)\,dx = \int f(y)\,dy, \quad y = a+x, \quad dy = dx.$$

Najprostsze podstawienia

$$\int g(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int g(y)\,dy, \quad y = ax, \quad dy = a\,dx,$$
$$\int f(a+x)\,dx = \int f(y)\,dy, \quad y = a+x, \quad dy = dx.$$

Podstawiając $t = f(x)$, $dt = f'(x)\,dx$ otrzymujemy

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|f(x)| + c.$$

Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int xe^{x^2}\,dx.$$

Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int x e^{x^2}\, dx.$$

Ponieważ $\left(x^2\right)' = 2x$, to całkę I można przedstawić w postaci

$$I = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2}\, dx$$

i dokonać podstawienia $t = x^2$.

Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int x e^{x^2}\, dx.$$

Ponieważ $\left(x^2\right)' = 2x$, to całkę I można przedstawić w postaci

$$I = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2}\, dx$$

i dokonać podstawienia $t = x^2$. Wtedy $dt = 2x\, dx$ skąd

$$I = \frac{1}{2} \int e^t\, dt = e^t + c.$$

Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int xe^{x^2}\, dx.$$

Ponieważ $\left(x^2\right)' = 2x$, to całkę I można przedstawić w postaci

$$I = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\, dx$$

i dokonać podstawienia $t = x^2$. Wtedy $dt = 2x\, dx$ skąd

$$I = \frac{1}{2}\int e^t\, dt = e^t + c.$$

Wracając do starych zmiennych otrzymujemy

$$I = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Przykład całkowania przez podstawianie

Obliczmy całkę

$$I(x) = \int xe^{x^2}\,dx.$$

Ponieważ $\left(x^2\right)' = 2x$, to całkę I można przedstawić w postaci

$$I = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx$$

i dokonać podstawienia $t = x^2$. Wtedy $dt = 2x\,dx$ skąd

$$I = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = e^t + c.$$

Wracając do starych zmiennych otrzymujemy

$$I = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Sprawdzenie przez różniczkowanie funkcji złożonej e^{x^2}:

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' = xe^{x^2}.$$

Przykład całkowania przez podstawianie c.d.

Podobnej na pozór całki

$$\Phi(x) = \int e^{x^2}\, dx$$

nie da się w ten sposób obliczyć.

Co więcej, tak określona funkcja $\Phi(x)$, mająca olbrzymie znaczenie w statystyce, nie jest funkcją elementarną.

Przykład (1)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

Przykład (1)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

$$\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \int t(\sin x)(\cos x)\,dx$$

Podstawiamy:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x.$$

Przykład (1)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

$$\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \int t(\sin x)(\cos x)\,dx$$

Podstawiamy:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x.$$

$$\int t(\sin x)(\cos x)\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$

Przykład (2)

Niech $t\,(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

Przykład (2)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

$$\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \int t(\sin x)(\cos x)\,dx$$

Podstawiamy:

$$y = \cos x, \quad y' = \sin x.$$

Przykład (2)

Niech $t(x) = x$, (t jak „tożsamość”, czyli „identyczność”).

$$\int (\sin x)(\cos x)\,dx = \int t(\sin x)(\cos x)\,dx$$

Podstawiamy:

$$y = \cos x, \quad y' = \sin x.$$

$$\int t(\sin x)(\cos x)\,dx = -\int y\,dy = -\frac{y^2}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + c.$$