Matematyka II

Wykład 1

Szeregi potęgowe

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Literatura

Podstawowa:

K. Selwat. *Wybrane zagadnienia matematyki*, wyd. 3 rozszerzone, Legnica 2020.

Dodatkowa:

F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

K. Kuratowski. *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

Zbieżność ciągów funkcji

Ciąg funkcji $f_n(x)$ jest zbieżny do funkcji $f(x)$ jeśli dla każdego $x_0 \in X \subseteq D_{f_n}$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_0) = f(x_0).$$

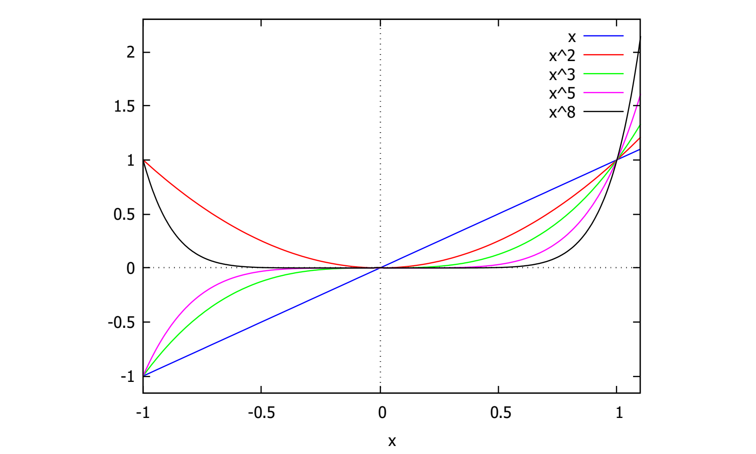
Przykład. Dla $x > -1$:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{dla } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{dla } x = 1, \\ \infty, & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Nie istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ dla $x \leq -1$.

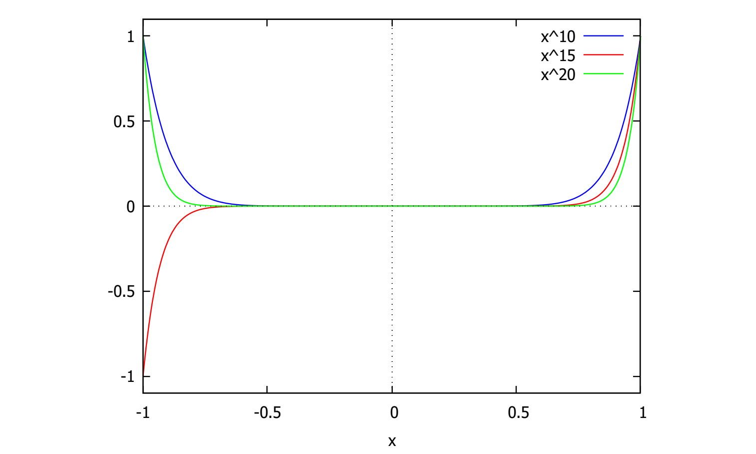
Przykład x^n (1)

$n = 1, 2, 3, 5, 8.$



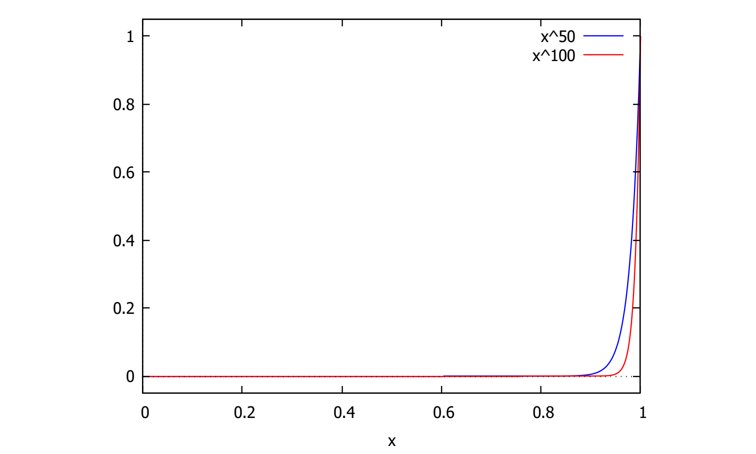
Przykład x^n (2)

$n = 10, 15, 20.$



Przykład x^n (3)

$n = 50, 100.$



Zbieżność ciągów funkcji

Definicja

Ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny do funkcji $f(x)$ dla $n \to \infty$:

$$\bigwedge_{x} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{k} \bigwedge_{n>k} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zbieżność ciągów funkcji

Definicja

Ciąg $f_n(x)$ *jest zbieżny do funkcji* $f(x)$ *dla* $n \to \infty$*:*

$$\bigwedge_{x} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{k} \bigwedge_{n>k} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

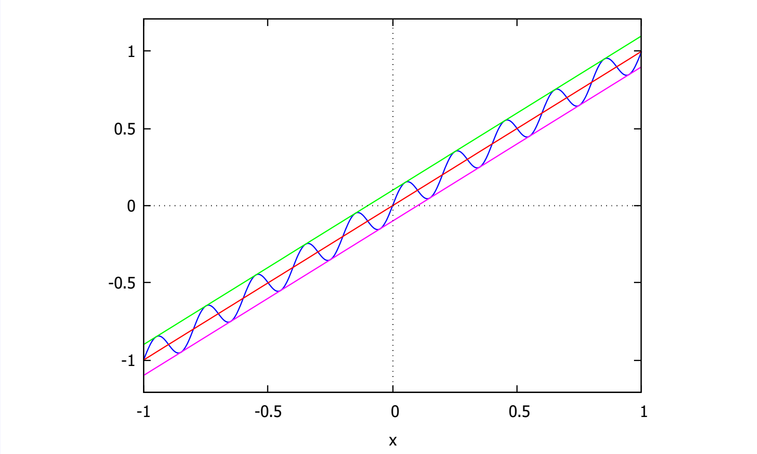
Definicja

Ciąg $f_n(x)$ *jest jednostajnie zbieżny do funkcji* $f(x)$ *dla* $n \to \infty$*:*

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{k} \bigwedge_{x} \bigwedge_{n>k} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

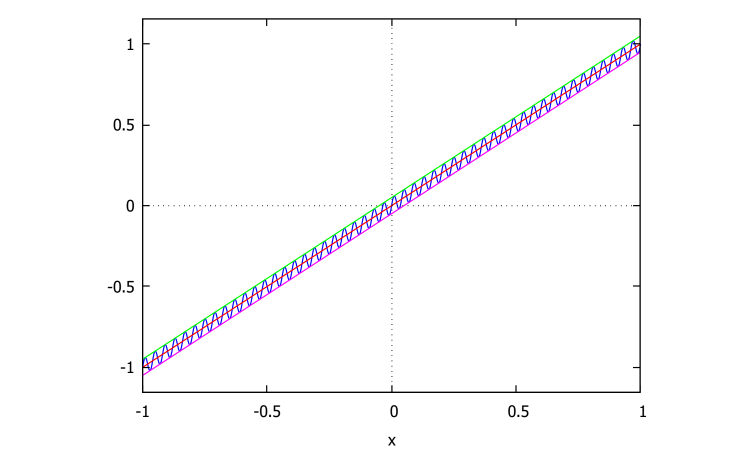
Przykład jednostajnej zbieżności (1)

$$f_n(x) = x + \frac{\sin(\pi n x)}{n}, \quad n = 10.$$



Przykład jednostajnej zbieżności (2)

$$f_n(x) = x + \frac{\sin(\pi n x)}{n}, \quad n = 50.$$



Zbieżność funkcji – ciągłość i różniczkowalność

Twierdzenie

Ciąg funkcji ciągłych $f_n(x)$ *jest zbieżny do funkcji ciągłej* $f(x)$, *jeśli jest zbieżny jednostajnie.*

Zbieżność funkcji – ciągłość i różniczkowalność

Twierdzenie

Ciąg funkcji ciągłych $f_n(x)$ jest zbieżny do funkcji ciągłej $f(x)$, jeśli jest zbieżny jednostajnie.

Twierdzenie

Ciąg pochodnych $f_n'(x)$ funkcji różniczkowalnych $f_n(x)$ jest zbieżny do pochodnej $f'(x)$ funkcji różniczkowalnej $f(x)$, jeśli zbieżny jednostajnie jest zarówno ciąg $f_n(x)$, jak i $f_n'(x)$:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Przykład: funkcja e^x

Niech

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x.$$

Przykład: funkcja e^x

Niech

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x.$$

Ciąg pochodnych:

$$f_n'(x) = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)' = n\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \to e^x.$$

Szeregi funkcyjne – zbieżność jednostajna

Szereg jest jednostajnie zbieżny, gdy jego ciąg sum częściowych jest jednostajnie zbieżny.

Wniosek

Jeśli szereg funkcji ciągłych jest jednostajnie zbieżny, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Szeregi funkcyjne – zbieżność jednostajna

Szereg jest jednostajnie zbieżny, gdy jego ciąg sum częściowych jest jednostajnie zbieżny.

Wniosek

Jeśli szereg funkcji ciągłych jest jednostajnie zbieżny, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Wniosek

Jeśli szereg funkcji różniczkowalnych jest jednostajnie zbieżny i szereg pochodnych też jest jednostajnie zbieżny, to suma szeregu pochodnych jest pochodną sumy szeregu funkcji:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Wzór Taylora

Twierdzenie

Jeśli $n = 0, 1, 2, \ldots$, *a funkcja* f *jest n-krotnie różniczkowalna, dla pewnego otoczenia punktu* x_0, *czyli tzn.* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *to dla każdego* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *istnieje punkt* c *pomiędzy* x_0 *i* x *taki, że*

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ & + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n . \end{aligned}$$

Wielomian Taylora

Wniosek

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}.$$

Wzór MacLaurina

Wzór Maclaurina to wzór Taylora dla $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \end{aligned}$$

dla pewnego x pomiędzy 0 a x.

Twierdzenie Taylora

Twierdzenie

Niech f będzie różniczkowalna n-krotnie w (a,b), $h = b - a$. Wówczas

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots \\ & + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n\,, \end{aligned}$$

gdzie R_n jest resztą.

Postacie reszt

Reszta w postaci Lagrange'a:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Reszta w postaci Cauchy'ego:

$$R_n = \frac{h^n (1 - \theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta' h).$$

Twierdzenie Maclaurina

Podstawiając $a = 0$, $b = x$ otrzymujemy:

Twierdzenie

Niech f różniczkowalna n-krotnie w $(0, x)$. Wtedy

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n\,, \tag{1}$$

gdzie R_n jest resztą.

Postacie reszt

Reszta w postaci Lagrange'a:

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x).$$

Reszta w postaci Cauchy'ego:

$$R_n = \frac{x^n (1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta' x).$$

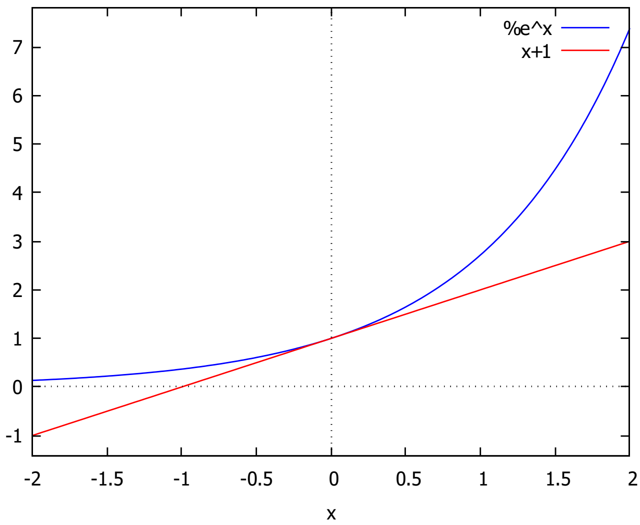
Prosty przykład

Niech $f(x) = e^x$.
Stosując twierdzenie Maclaurina dla $n = 2$ otrzymujemy
$f'(x) = f''(x) = e^x$, $f(0) = f'(0) = 1$. Stąd

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\theta x}.$$

Ponieważ $\frac{x^2}{2} e^{\theta x} > 0$, to otrzymujemy nierówność $e^x \geq 1 + x$

Prosty przykład – wykres



Przybliżenie sinusa

Przybliżona wartość $\sin x$ dla $x = \pi/30$ (czyli dla 6°) ze wzoru Maclaurina.
Jeśli $n = 4$, to

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4 = x + \frac{x^3}{6} + R_4,$$

Reszta w postaci Lagrange'a:

$$R_4 = \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x) \leq \frac{x^4}{24}.$$

Przybliżenie sinusa

Przybliżona wartość $\sin x$ dla $x = \pi/30$ (czyli dla 6°) ze wzoru Maclaurina.
Jeśli $n = 4$, to

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4 = x + \frac{x^3}{6} + R_4,$$

Reszta w postaci Lagrange'a:

$$R_4 = \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x) \leq \frac{x^4}{24}.$$

Dla $x = \pi/30$: $R_4 \leq (\pi/30)^5/24 \leq 10^{-5}$ czyli z dokładnością do co najmniej 5 miejsc dziesiętnych.
Dla $\pi \approx 3.14159265$ otrzymujemy $\sin(\pi/30) \approx 0.1045$, czyli wartość odczytaną z tablic czterocyfrowych lub obliczoną komputerowo (Maxima):

$$\sin(\pi/30) = 0.1045284632676535$$

Szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Szereg ten jest zbieżny przynajmniej dla $x = 0$, a może też być zbieżny dla argumentów z większego zbioru postaci $(-r, r)$ – nawet dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Przedstawienie funkcji $f(x)$ w tej postaci nazywa się rozwinięciem funkcji $f(x)$ w szereg potęgowy.

Promień zbieżności (1)

Dla szeregu potęgowego

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_x^n$$

określa się promień zbieżności r wzorem:

$$r = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right|}$$

lub

$$r = \frac{1}{\lim_{k\to\infty|\sqrt[k]{|a_k|}}}.$$

Promień zbieżności (2)

Twierdzenie

Szereg potęgowy

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_x^n$$

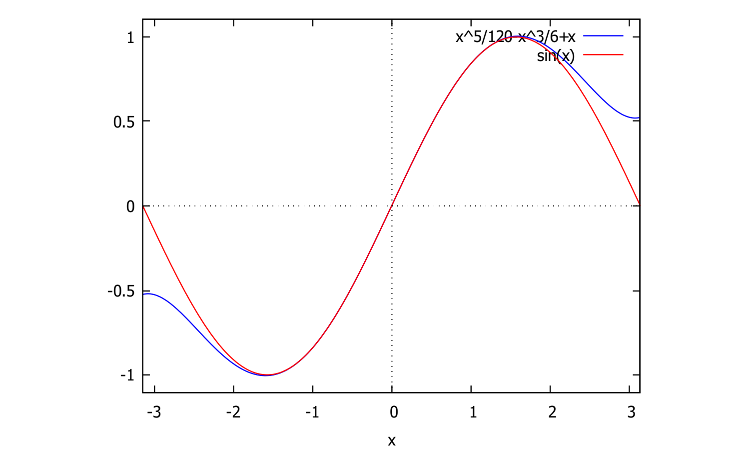
jest dla $x \in (-r, r)$ *zbieżny jednostajnie.*

Wybrane rozwinięcia

Funkcja	Rozwinięcie	r
e^x	$1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$	∞
$\sin x$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots$	∞
$\cos x$	$1-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}-\cdots$	∞
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots$	1
$\operatorname{tg} x$	$x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\cdots$	$\pi/2$

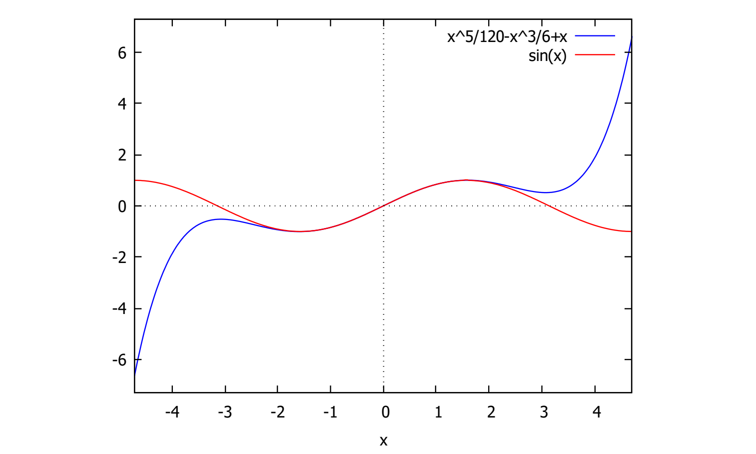
Sinus dla $x \in (-\pi, \pi)$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$



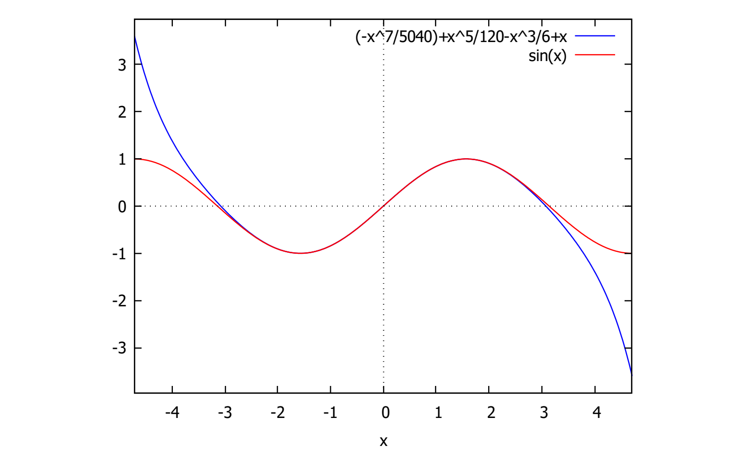
Sinus dla $x \in (-2\pi, 2\pi)$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,.$$



Sinus dla $x \in (-2\pi, 2\pi)$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7}\,.$$



Logarytm – promień zbieżności

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

Logarytm – promień zbieżności

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} .$$

Logarytm – promień zbieżności

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1.$$

Logarytm – promień zbieżności

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

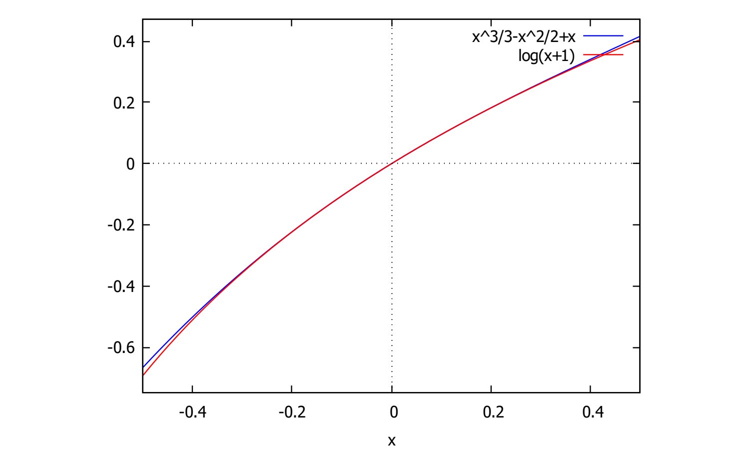
$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1.$$

Wniosek: $r = 1$.

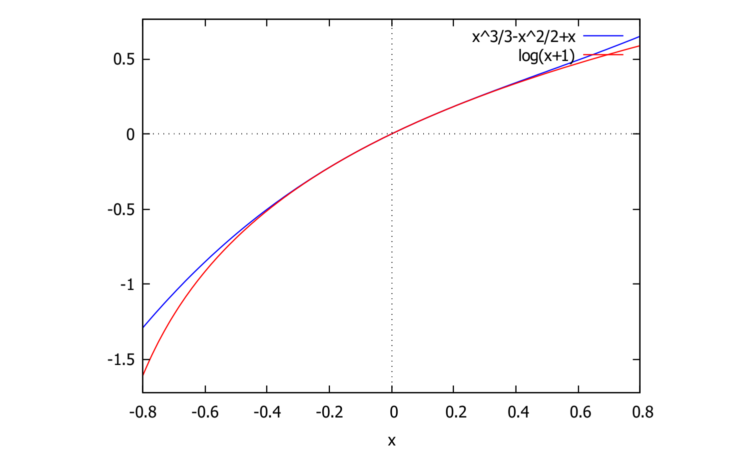
Logarytm dla $x \in (-0.5, 0.5)$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$



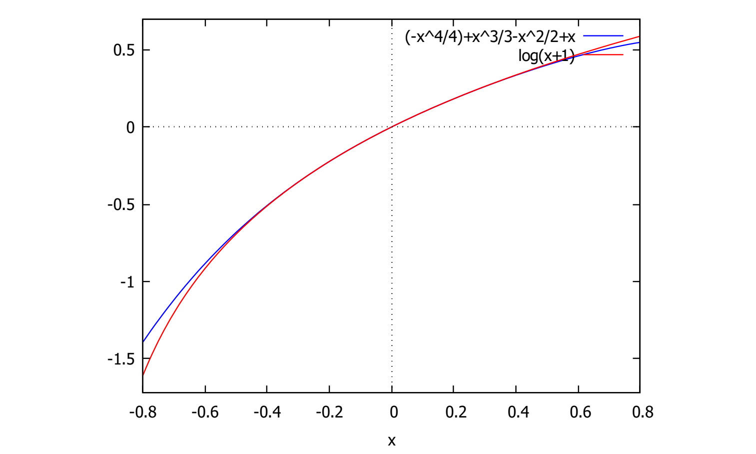
Logarytm dla $x \in (-0.8, 0.8)$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$



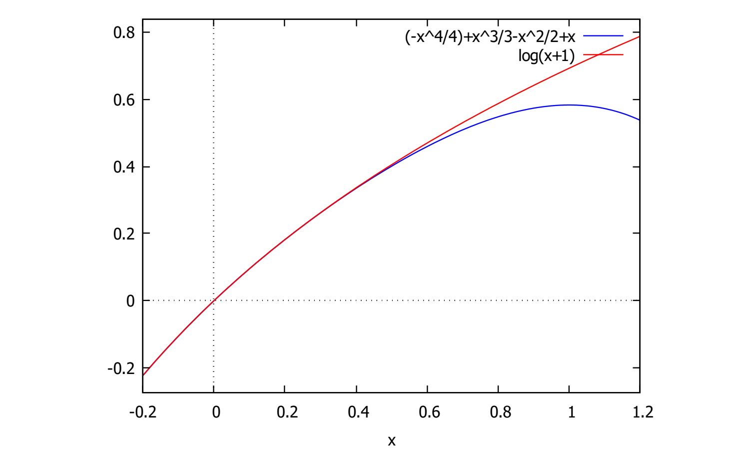
Logarytm dla $x \in (-0.8, 0.8)$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$



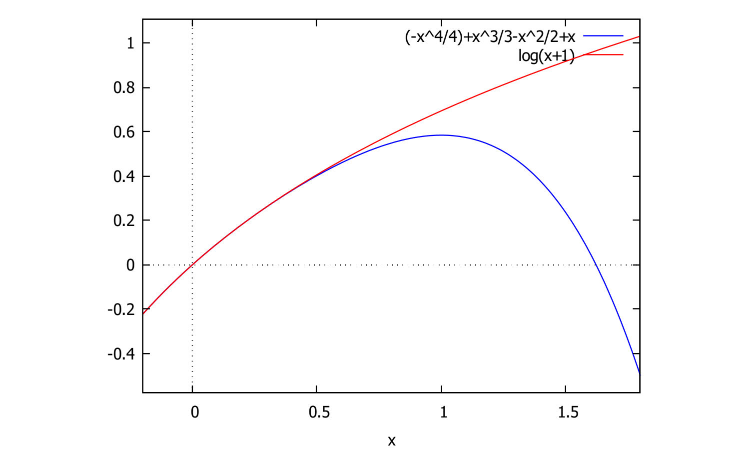
Logarytm (?) dla $x \in (-0.2, 1.2)$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$



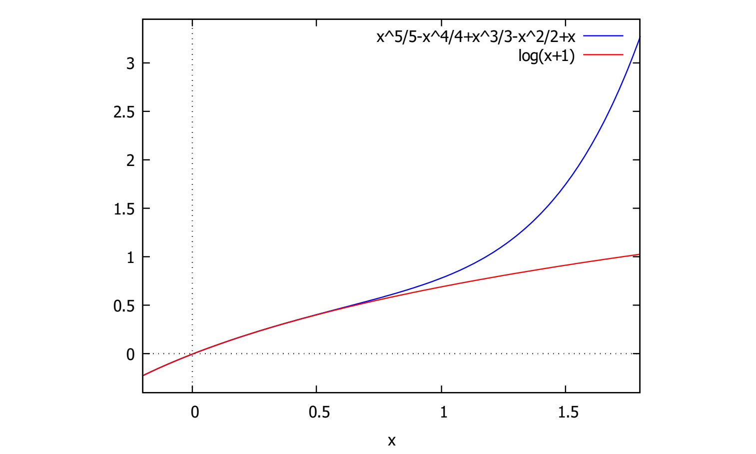
Logarytm (?) dla $x \in (-0.2, 1.8)$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$



Logarytm (?) dla $x \in (-0.2, 1.8)$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$



Rozwinięcie e^{-x}

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Rozwinięcie e^{-x}

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Podstawiamy:

$$x \leftarrow -x$$

Rozwinięcie e^{-x}

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Podstawiamy:

$$x \leftarrow -x$$

$$e^{-x} \approx 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$$

Rozwinięcie e^{-x^2}

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Rozwinięcie e^{-x^2}

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Podstawiamy:

$$x \leftarrow -x^2$$

Rozwinięcie e^{-x^2}

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Podstawiamy:

$$x \leftarrow -x^2$$

$$e^{-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!}$$

Rozwinięcie $\sin x$

Kolejne kroki przybliżenia $\sin x$

Liczby Bernoulliego

Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!} & \text{dla } x>0,\\ 1 & x=0.\end{cases}$$

Funkcja $f\left(x\right)$ jest ciągła – w zerze jest ciągła prawostronnie:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1}=1.$$

Jest różniczkowalna – w zerze ma pochodną prawostronną.

Liczby Bernoulliego

Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} & \text{dla } x > 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

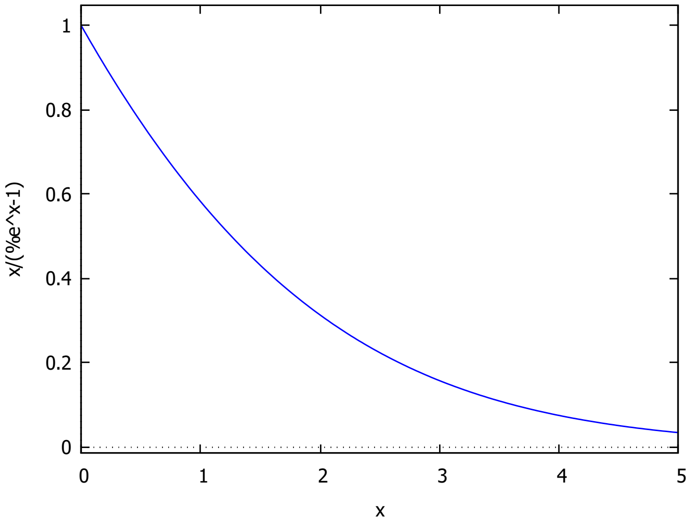
Funkcja $f(x)$ jest ciągła – w zerze jest ciągła prawostronnie:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1.$$

Jest różniczkowalna – w zerze ma pochodną prawostronną.

Współczynniki B_n, to liczby Bernoulliego.

Wykres $f(x)$



Pochodne

n	$f^{(n)}(x)$	B_0
0	$\frac{x}{e^x-1}$	1
1	$-\frac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{((x-2)e^x+x+2)e^x}{(e^x-1)^3}$	$\frac{1}{6}$
3	$-\frac{e^x\left(xe^{2x}-3e^{2x}+4xe^x+x+3\right)}{(e^x-1)^4}$	0

Pochodne

n	$f^{(n)}(x)$	B_0
0	$\frac{x}{e^x-1}$	1
1	$-\frac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{((x-2)e^x+x+2)e^x}{(e^x-1)^3}$	$\frac{1}{6}$
3	$-\frac{e^x\left(xe^{2x}-3e^{2x}+4xe^x+x+3\right)}{(e^x-1)^4}$	0

Liczby Bernoulliego: $B_0 = f(x)\Big|_{x=0}$