

Metody Numeryczne

Wykład 6

Całkowanie i różniczkowanie

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2024/25



Funkcje pierwotne

Jeśli

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

to $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.



Funkcje pierwotne

Jeśli

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

to $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Uwaga 1. Jeśli $F(x)$ jest funkcją elementarną, to jej pochodna $f(x)$ też jest funkcją elementarną.



Funkcje pierwotne

Jeśli

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

to $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Uwaga 1. Jeśli $F(x)$ jest funkcją elementarną, to jej pochodna $f(x)$ też jest funkcją elementarną.

Uwaga 2. Funkcja pierwotna $F(x)$ funkcji elementarnej $f(x)$ nie musi być funkcją elementarną.



Całka nieoznaczona

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to $F(x) + c$ też jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.



Całka nieoznaczona

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to $F(x) + c$ też jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Dla danej funkcji $f(x)$ mamy zawsze rodzinę funkcji pierwotnych postaci $F(x) + c$, gdzie c jest dowolną stałą.



Całka nieoznaczona

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to $F(x) + c$ też jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Dla danej funkcji $f(x)$ mamy zawsze rodzinę funkcji pierwotnych postaci $F(x) + c$, gdzie c jest dowolną stałą.

Rodzinę taką nazywamy całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ i oznaczamy

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$



Całka nieoznaczona

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to $F(x) + c$ też jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Dla danej funkcji $f(x)$ mamy zawsze rodzinę funkcji pierwotnych postaci $F(x) + c$, gdzie c jest dowolną stałą.

Rodzinę taką nazywamy całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ i oznaczamy

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Warunek

$$F(x_0) = y_0$$

jeżeli jest spełniony, to jednoznacznie wybiera funkcję z rodziny wszystkich funkcji pierwotnych.



Problemy – funkcje nieelementarne

$$F(x) = \int e^{-x^2} dx + c,$$

$$G(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx + c,$$

$$H(x) = \int \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx + c.$$



Problemy – funkcje nieelementarne

$$F(x) = \int e^{-x^2} dx + c,$$

$$G(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx + c,$$

$$H(x) = \int \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx + c.$$

Funkcje te nie są funkcjami elementarnymi.



Rozwinięcia w szereg potęgowy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

dla $x \in (-\infty, \infty)$.



Rozwinięcia w szereg potęgowy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

dla $x \in (-\infty, \infty)$.

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$



Rozwinięcia w szereg potęgowy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

dla $x \in (-\infty, \infty)$.

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

$$\int e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + c,$$

$$\int e^{-x^2} dx \approx \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + c.$$

m musi być dostatecznie duże, aby błąd był dostatecznie mały.



Przykład

Niech

$$F(x) = \int e^{-x^2} dx, \quad F(0) = 0.$$

Wartości $F(x)$ dla $x = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ – Maxima:

0.09966766429033634, 0.1973650309263709, 0.2912378826569655,
0.3796528397004753, 0.4612810064127924, 0.5351535268080787,
0.6006856680827442, 0.6576698563283956, 0.7062415149635398,
0.7468241328124269.

Wartości $F(x)$ dla $x = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ – rozwinięcie dla $m = 2$:

0.09976666666666667, 0.1981333333333333, 0.2937,
0.38506666666666667, 0.4708333333333333, 0.5496,
0.61996666666666667, 0.6805333333333333, 0.7299,
0.76666666666666667.



Przykład c.d.

Niech

$$F(x) = \int e^{-x^2} dx \quad F(0) = 0.$$

Wartości $F(x)$ dla $x = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ – Maxima:

0.09966766429033634, 0.1973650309263709, 0.2912378826569655,
0.3796528397004753, 0.4612810064127924, 0.5351535268080787,
0.6006856680827442, 0.6576698563283956, 0.7062415149635398,
0.7468241328124269.

Wartości $F(x)$ dla $x = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ – rozwinięcie dla $m = 3$:

0.09976666428571429, 0.1981330285714286, 0.2936947928571428,
0.3850276571428572, 0.4706473214285714, 0.5489334857142857,
0.61800585, 0.6755401142857143, 0.7185119785714286,
0.7428571428571429.



Przykład – porównanie

$$F(x) = \int e^{-x^2} dx, \quad F(0) = 0.$$

x	Maxima	$m = 2$	$m = 3$
0.1	0.0997	0.0998	0.0998
0.2	0.1974	0.1981	0.1981
0.3	0.2912	0.2937	0.2937
0.4	0.3797	0.3851	0.3850
0.5	0.4708	0.4708	0.4706
0.6	0.5352	0.5496	0.5489
0.7	0.6007	0.6110	0.6180
0.8	0.6577	0.6805	0.6755
0.9	0.7062	0.7299	0.7185
1.0	0.7468	0.7667	0.7429



Całka oznaczona – definicja

Całka oznaczona funkcji $f(x)$ w granicach od a do b :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.



Całka oznaczona – definicja

Całka oznaczona funkcji $f(x)$ w granicach od a do b :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Przykład.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Całka Riemanna

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k^*),$$

gdzie

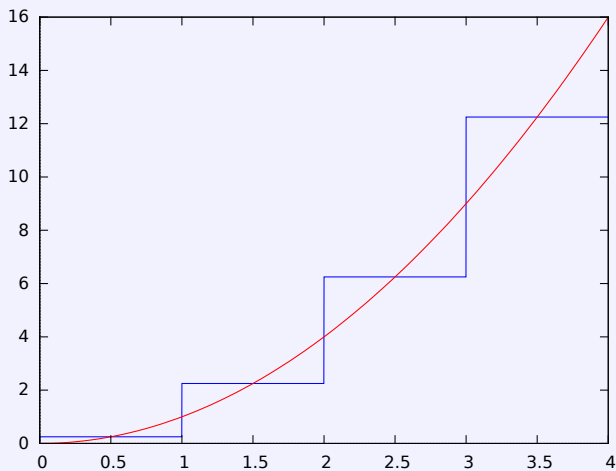
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$$

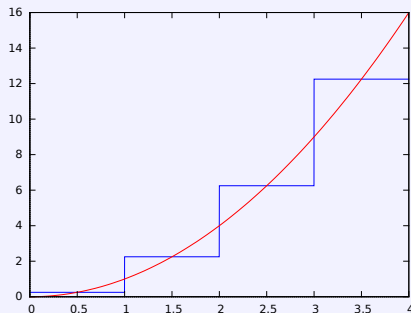
oraz

$$\max(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0$$

dla $n \rightarrow \infty$.



Przykład x^2 

Przykład x^2 c.d.

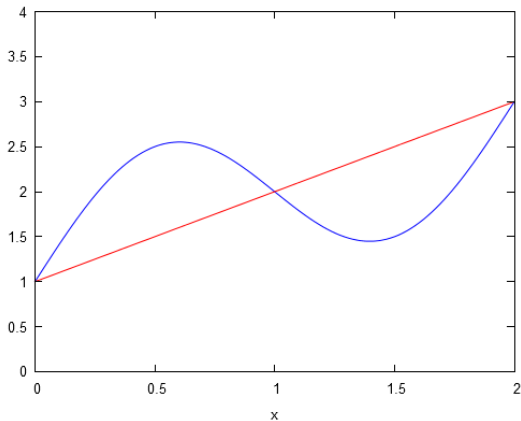
$$\int_0^4 x^2 dx = 64/3 = 21.33\dots,$$

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0.25 + 2.25 + 6.25 + 12.25 = 21.$$



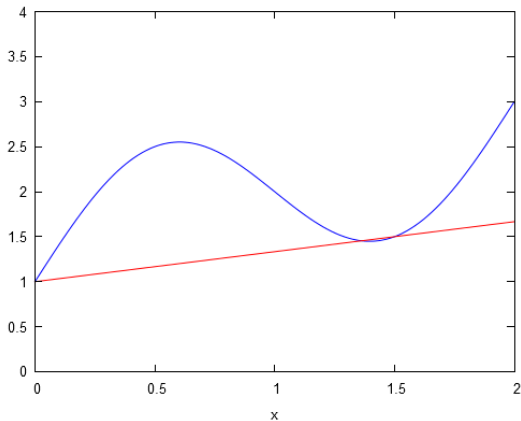
Przybliżenie trapezem – bardzo dobre

$$f(x) = 1 + x + \sin(\pi x), \quad \int_0^2 f(x) dx = 4.$$



Przybliżenie trapezem – beznadziejne

$$f(x) = 1 + x + \sin(\pi x), \quad \int_0^{1.5} f(x) dx = \frac{21\pi + 8}{8\pi} \approx 2.9433.$$



Metoda trapezów

Przedział całkowania (a, b) dzielimy na n równych części o długości

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Punkty podziału:

$$x_k = a + kh = x_{k-1} + h$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$, $x_0 = a$.



Metoda trapezów

Przedział całkowania (a, b) dzielimy na n równych części o długości

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Punkty podziału:

$$x_k = a + kh = x_{k-1} + h$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$, $x_0 = a$.

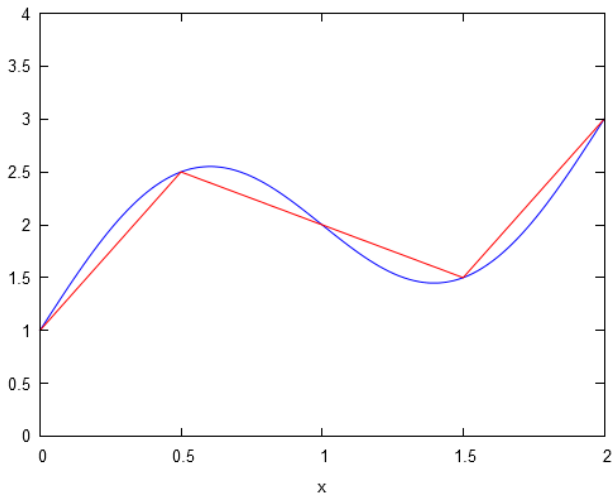
Przybliżenie sumą T_n pól trapezów:

$$T_n = h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right).$$

Błąd: $\delta = |f''(\xi)| (b - a) h^2 / 12$, gdzie $\xi \in (a, b)$.



Przykład – wykresy



Przykład – obliczenia

$$\int_0^2 (1 + x + \sin(\pi x)) dx = 4,$$



Przykład – obliczenia

$$\int_0^2 (1 + x + \sin(\pi x)) \, dx = 4,$$

$$T_4 = 0.5 (0.5 + 2.5 + 2 + 1.5 + 1.5) .$$



Przykład – obliczenia

$$\int_0^2 (1 + x + \sin(\pi x)) \, dx = 4,$$

$$T_4 = 0.5 (0.5 + 2.5 + 2 + 1.5 + 1.5).$$

$$\int_0^{1.5} (1 + x + \sin(\pi x)) \, dx = \frac{21\pi + 8}{8\pi} \approx 2.9433,$$



Przykład – obliczenia

$$\int_0^2 (1 + x + \sin(\pi x)) dx = 4,$$

$$T_4 = 0.5 (0.5 + 2.5 + 2 + 1.5 + 1.5).$$

$$\int_0^{1.5} (1 + x + \sin(\pi x)) dx = \frac{21\pi + 8}{8\pi} \approx 2.9433,$$

$$T_3 = 0.5 (0.5 + 2.5 + 2 + 0.75) = 2.875.$$



Przykład – obliczenia

$$\int_0^2 (1 + x + \sin(\pi x)) dx = 4,$$

$$T_4 = 0.5 (0.5 + 2.5 + 2 + 1.5 + 1.5).$$

$$\int_0^{1.5} (1 + x + \sin(\pi x)) dx = \frac{21\pi + 8}{8\pi} \approx 2.9433,$$

$$T_3 = 0.5 (0.5 + 2.5 + 2 + 0.75) = 2.875.$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x),$$

skąd błąd $\delta \leq 0.0625\pi^2 = 0.6169 \dots$



Przykład trudniejszy

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x} + 0.2\left(\frac{x}{1.6}\right)^6$$

i całkę

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Wartości całek dla $b = 1.6$ i $b = 1.2$, obliczone programem *Maxima*, wynoszą

$$\int_0^{1.6} f(x) dx = 0.5780408938193461,$$

$$\int_0^{1.2} f(x) dx = 0.3750600607148383.$$



Przykład – obliczenia

Całki dla funkcji

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x} + 0.2\left(\frac{x}{1.6}\right)^6$$

obliczymy metodą trapezów, dzieląc przedział $[0, 1.6]$ na cztery równe części, a przedział $[0, 1.2]$ na trzy równe części.

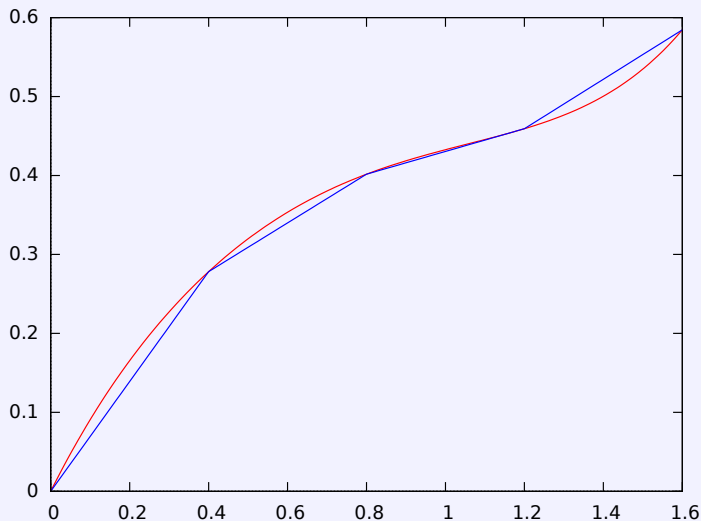
x	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6
$f(x)$	0	0.2782	0.40166	0.4592	0.5845

$$\int_0^{1.6} f(x) dx \approx T_4 = 0.5725345898121758,$$

$$\int_0^{1.2} f(x) dx \approx T_3 = 0.3637943460331163.$$



Przykład – wykres



Metoda Simpsona

Całkę przybliżamy polem pod parabolą.

Jeśli n jest parzyste, to

$$S_n = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})) \right. \\ \left. + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})) + f(x_n) \right)$$



Metoda Simpsona

Całkę przybliżamy polem pod parabolą.

Jeśli n jest parzyste, to

$$S_n = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})) \right. \\ \left. + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})) + f(x_n) \right)$$

Błąd: $\delta = |f^{(4)}(\xi)| (b-a) h^4 / 180$, gdzie $\xi \in (a, b)$.



Przykład – obliczenia

$$S_4 = \frac{0.5}{3} (1 + 4 (2.5 + 1.5) + 2 \cdot 2 + 3) = 4.$$



Przykład – obliczenia

$$S_4 = \frac{0.5}{3} (1 + 4(2.5 + 1.5) + 2 \cdot 2 + 3) = 4.$$

Błąd: $\delta \leq 0.001041667\pi^4 = 0.1014\dots$



Przykład trudniejszy –ponownie

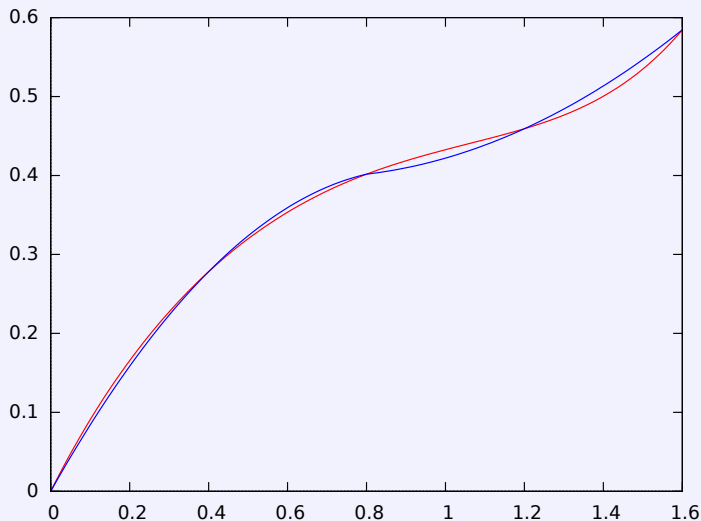
$$\int_0^{1.6} f(x) dx \approx S_4 = 0.5783442918819829.$$

Dla $b = 1.2$, to nie możemy skorzystać z podziału na trzy odcinki. Dzielimy więc odcinek $[0, 1.2]$ na przykład na sześć części. Wtedy

$$\int_0^{1.2} f(x) dx \approx S_6 = 0.3750441656628404.$$



Przykład – wykres



Wykonalność różniczkowania

Pochodna funkcji elementarnej jest zawsze funkcją elementarną.
Nie ma więc tych problemów, co przy całkowaniu.



Wykonalność różniczkowania

Pochodna funkcji elementarnej jest zawsze funkcją elementarną.
Nie ma więc tych problemów, co przy całkowaniu.

Są za to problemy obliczeniowe.



Iloraz różnicowy

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)).$$



Iloraz różnicowy

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)).$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi),$$

czyli

$$f'(x) = \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) - \frac{1}{2}hf''(\xi).$$

gdzie $\xi \in (x, x+h)$.



Iloraz różnicowy

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)).$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi),$$

czyli

$$f'(x) = \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) - \frac{1}{2}hf''(\xi).$$

gdzie $\xi \in (x, x+h)$.

$(f(x+h) - f(x))/h$ – jest przybliżeniem pochodnej,
a $|hf''(\xi)/2|$ jest błędem obciążenia.



Iloraz różnicowy – przykład

Funkcja

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6,$$

pochodna

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1.$$



Iloraz różnicowy – przykład

Funkcja

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6,$$

pochodna

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1.$$

Dla $h = 0.5$, przybliżenie pochodnej

$$f'(x) \approx 2.0 (1.5x^2 + 4.75x + 1.625) = g(x).$$



Iloraz różnicowy – przykład

Funkcja

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6,$$

pochodna

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1.$$

Dla $h = 0.5$, przybliżenie pochodnej

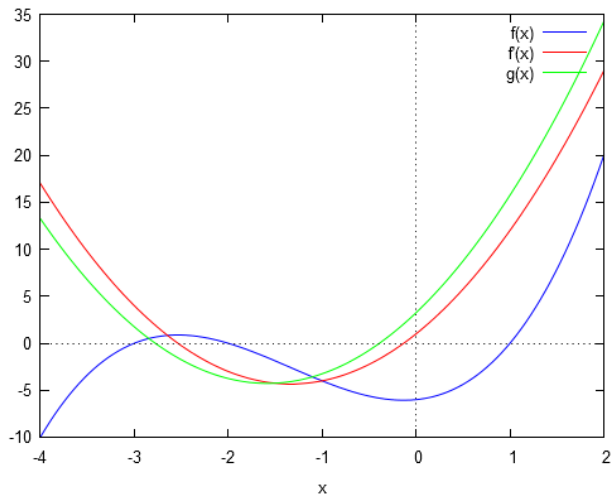
$$f'(x) \approx 2.0 (1.5x^2 + 4.75x + 1.625) = g(x).$$

Druga pochodna:

$$f''(x) = 6x + 8.$$



Iloraz różnicowy – przykład c.d.



Błąd przybliżenia pochodnej

W przedziale $[-4, 2]$, błąd $d = hf''(\xi)/2$ nie przekracza wartości na końcu przedziału plus h , czyli w punkcie $x = 2 + h$: $d < 5.75$.



Błąd przybliżenia pochodnej

W przedziale $[-4, 2]$, błąd $d = hf''(\xi)/2$ nie przekracza wartości na końcu przedziału plus h , czyli w punkcie $x = 2 + h$: $d < 5.75$.

W rzeczywistości błąd $|g(x) - f'(x)| \leq 5.25$.



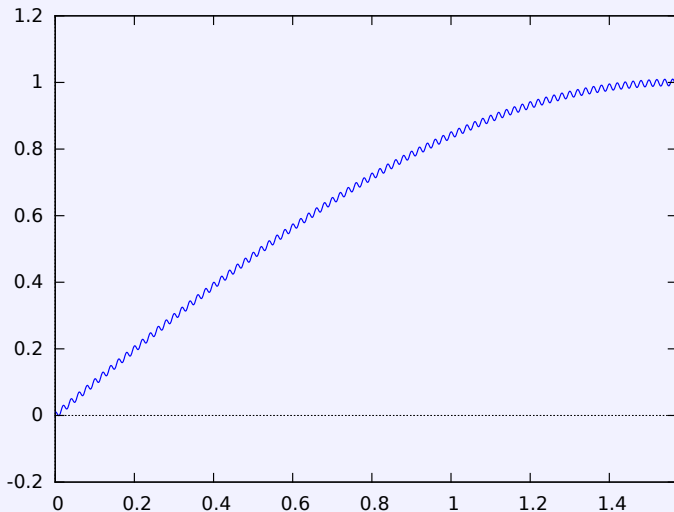
Trudności

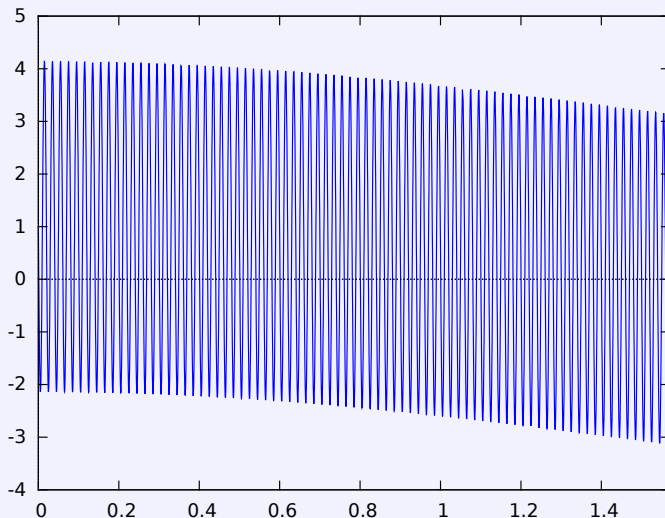
$$f(x) = \sin x + 0.01 \cos 100\pi x,$$

$$f'(x) = \cos x - \pi \sin 100\pi x.$$

Jeśli pochodną zastąpimy przez ilorazy różnicowe dla $h = 0.01$ i kolejnych punktów, począwszy od $x = 0$, to dominujący w $f'(x)$ czynnik $\pi \sin 100\pi x$ zniknie całkowicie.



Wykres funkcji $f(x)$ 

Wykres pochodnej $f'(x)$ 

Dane empiryczne

Jeśli wartości funkcji są empiryczne, na przykład z pomiarów, to różniczkowanie numeryczne jest bardzo ryzykowne, bo potęguje skutki błędów pomiarowych. Tego niebezpieczeństwa nie ma przy całkowaniu numerycznym.



Dane empiryczne

Jeśli wartości funkcji są empiryczne, na przykład z pomiarów, to różniczkowanie numeryczne jest bardzo ryzykowne, bo potęguje skutki błędów pomiarowych. Tego niebezpieczeństwa nie ma przy całkowaniu numerycznym.

Przykład w książce:

W. Kordecki, K. Selwat. *Metody numeryczne dla informatyków*.
Przykład 6.6.



Wzór interpolacyjny Lagrange'a – przypomnienie

Wielomian $p(x)$ wyraża się jako suma

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

gdzie

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$



Przykład

Dla $n = 3$ i punktów

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

otrzymuje się następujące wielomiany Lagrange'a

$$l_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x,$$

$$l_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6).$$



Przykład c.d.

Punkty:

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954



Przykład c.d.

Punkty:

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

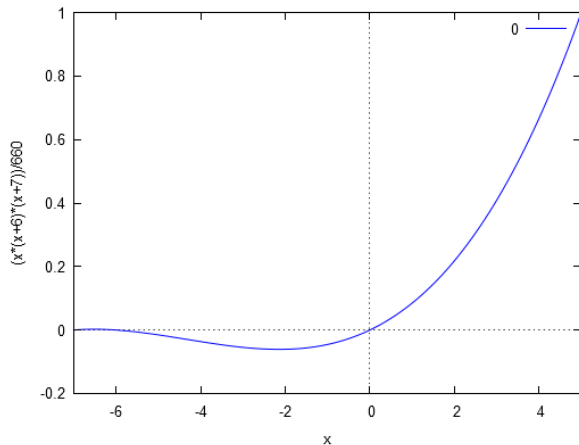
Wielomian interpolacyjny

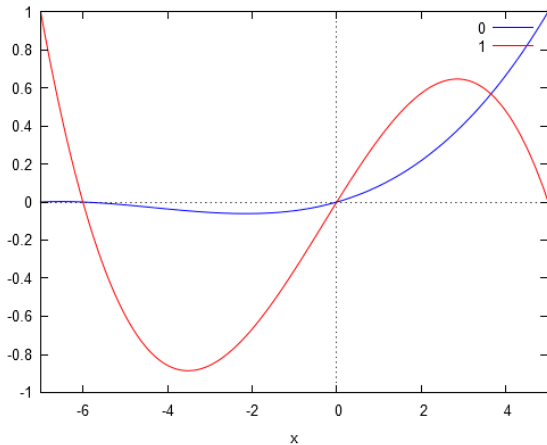
$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x),$$

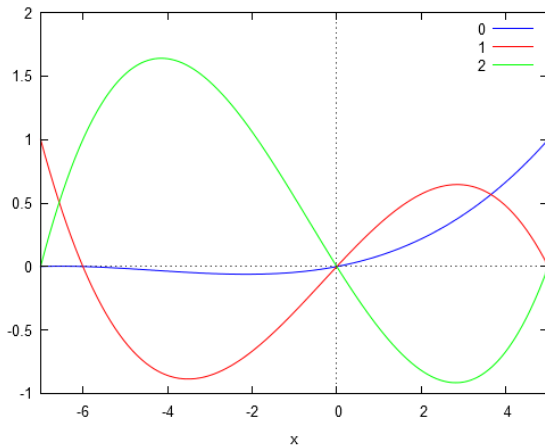
więc

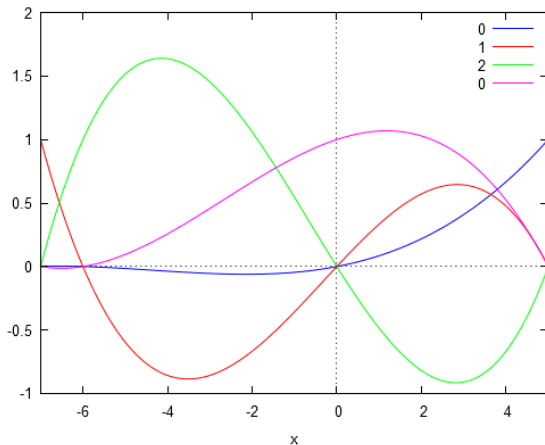
$$\begin{aligned} p(x) &= l_0(x) - 23l_1(x) - 54l_2(x) - 954l_3(x) \\ &= 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954. \end{aligned}$$



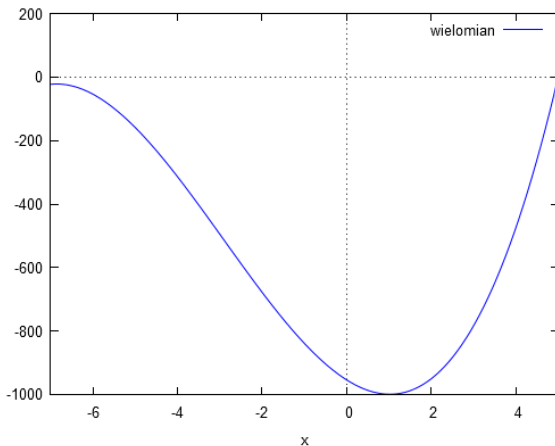
Przykład – wykres l_0 

Przykład – wykres $l_0 - l_1$ 

Przykład – wykres $l_0 - l_2$ 

Przykład – wykres $l_0 - l_3$ 

Przykład – wykres $p(x)$



Funkcja=wielomian+reszta

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) w(x),$$

gdzie

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

$$w(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$



Pochodna

$$w'(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{j=0, j \neq i} (x - x_j)$$

$$w'(x_m) = \prod_{j=0, j \neq m} (x_m - x_j).$$

Stąd

$$f'(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l'_i(x_m) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{x_m}) \prod_{j=0, j \neq i} (x_m - x_j).$$



Inny przykład

Przykład w książce:

W. Kordecki, K. Selwat. *Metody numeryczne dla informatyków*.
Przykład 6.7.

