Metody Numeryczne

Wykład 5

Aproksymacja

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Digitalizacja – próbkowanie

W przedziale $[a, b]$ określona jest funkcja ciągła $f(t)$, $t \in [a, b]$.

Digitalizacja – próbkowanie

W przedziale $[a, b]$ określona jest funkcja ciągła $f(t)$, $t \in [a, b]$.
Niech t_i będzie ciągiem skończonym takim, że $t_0 = a$, $t_n = b$ oraz

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}.$$

Digitalizacja – próbkowanie

W przedziale $[a, b]$ określona jest funkcja ciągła $f(t)$, $t \in [a, b]$. Niech t_i będzie ciągiem skończonym takim, że $t_0 = a$, $t_n = b$ oraz

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}.$$

Określamy funkcję $f_d(t)$ wzorem

$$f_d(t) = f(t_i)$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Digitalizacja – próbkowanie

W przedziale $[a, b]$ określona jest funkcja ciągła $f(t)$, $t \in [a, b]$.

Niech t_i będzie ciągiem skończonym takim, że $t_0 = a$, $t_n = b$ oraz

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}.$$

Określamy funkcję $f_d(t)$ wzorem

$$f_d(t) = f(t_i)$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Jest to zamiana postaci analogowej sygnału na cyfrową.

Digitalizacja – próbkowanie

W przedziale $[a, b]$ określona jest funkcja ciągła $f(t)$, $t \in [a, b]$.

Niech t_i będzie ciągiem skończonym takim, że $t_0 = a$, $t_n = b$ oraz

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}.$$

Określamy funkcję $f_d(t)$ wzorem

$$f_d(t) = f(t_i)$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Jest to zamiana postaci analogowej sygnału na cyfrową.

Funkcja schodkowa $f_d(t)$ jest aproksymacją funkcji ciągłej $f(t)$.

Problem

Dane:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Szukane:

Funkcja $f(x)$ danej klasy taka, aby w punktach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jej wartości $f(x_i)$ najlepiej przybliżały wartości y_i.

Problem

Dane:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Szukane:

Funkcja $f(x)$ danej klasy taka, aby w punktach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jej wartości $f(x_i)$ najlepiej przybliżały wartości y_i.

Potrzebna jest miara jakości przybliżenia, czyli odległości między zbiorem

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

a zbiorem

$$\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}.$$

Metryka

Przestrzenią metryczną jest para (X, ρ), gdzie X jest zbiorem, a metryka ρ jest funkcją określoną na $X \times X$

$$\rho : (x, y) \to [0, \infty)$$

spełniającą warunki:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Metryka

Przestrzenią metryczną jest para (X, ρ), gdzie X jest zbiorem, a metryka ρ jest funkcją określoną na $X \times X$

$$\rho : (x, y) \to [0, \infty)$$

spełniającą warunki:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Warunek 3 osi nazwę warunku trójkąta.

$\rho(x, y)$ to *odległość* między punktami x i y.

Przestrzenie funkcyjne z normą

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych, określonych na odcinku $K = [a, b]$ lub funkcji określonych na zbiorze $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Przestrzenie funkcyjne z normą

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych, określonych na odcinku $K = [a, b]$ lub funkcji określonych na zbiorze $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Normą funkcji $f \in \mathcal{F}$ jest odwzorowanie

$$||\cdot|| \to [0, \infty)$$

spełniające warunki:

1. $||f|| = 0 \iff f \equiv 0,$
2. $||\alpha f|| = |\alpha| \, ||f||,$
3. $||f|| + ||g|| \geq ||f + g||.$

Przestrzenie funkcyjne z normą

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych, określonych na odcinku $K = [a, b]$ lub funkcji określonych na zbiorze $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Normą funkcji $f \in \mathcal{F}$ jest odwzorowanie

$$||\cdot|| \to [0, \infty)$$

spełniające warunki:

1. $||f|| = 0 \iff f \equiv 0$,
2. $||\alpha f|| = |\alpha| \, ||f||$,
3. $||f|| + ||g|| \geq ||f + g||$.

Warunek 3 osi nazwę warunku trójkąta.

Norma jako metryka

Jeśli $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji określonych na zbiorze K, to wzór

$$\rho_{||\cdot||}(f,g) = ||f-g||$$

określa metrykę w tej rodzinie.

Norma jako metryka

Jeśli $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji określonych na zbiorze K, to wzór

$$\rho_{||\cdot||}(f, g) = ||f - g||$$

określa metrykę w tej rodzinie.

Para $(\mathcal{F}, \rho_{||\cdot||})$ jest przestrzenią metryczną.

Norma jako metryka

Jeśli $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji określonych na zbiorze K, to wzór

$$\rho_{||\cdot||}(f,g) = ||f-g||$$

określa metrykę w tej rodzinie.

Para $(\mathcal{F}, \rho_{||\cdot||})$ jest przestrzenią metryczną.

Uwaga. Jeśli nie powoduje to niejednoznaczności, to zamiast $\rho_{||\cdot||}(f,g)$ będzie pisać tylko $\rho(f,g)$.

Norma jednostajna

$$||f|| = \sup_{x \in K} |f - g|.$$

Jest to norma.

Sprawdzenia wymaga tylko warunek 3

Norma jednostajna

$$||f|| = \sup_{x \in K} |f - g|.$$

Jest to norma.

Sprawdzenia wymaga tylko warunek 3

Jest tak, bo

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

Norma jednostajna – przykład

$K = [-5, 5]$.

$$f(x) = \frac{x\left(x^2+1\right)}{10x^2+1},$$
$$g(x) = \frac{x}{10},$$
$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{9x}{100x^2+10}.$$

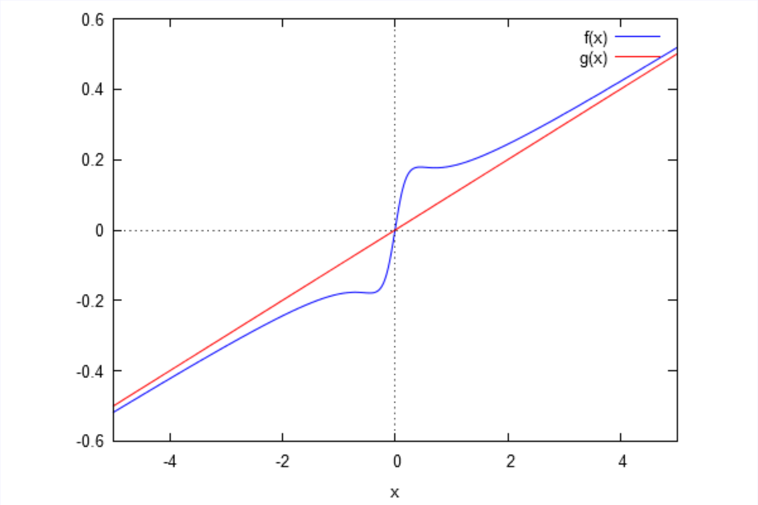
Pochodna

$$h'(x) = \frac{-9\left(10x^2-1\right)}{10\left(x^2+1\right)^2}$$

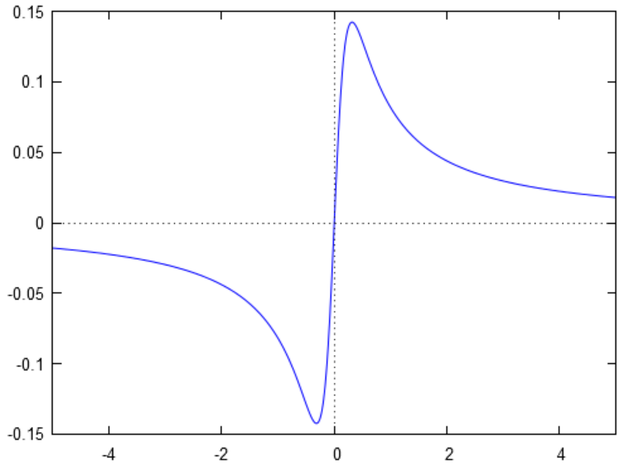
zeruje się dla $x_0 = \sqrt{1/10} \approx 0.3162277660168379$.

$$||f(x) - g(x)|| = h(x_0) = \frac{9}{2 \cdot 10^{\frac{3}{2}}} \approx 0.142302494707577.$$

Przykład – wykresy $f(x)$ i $g(x)$



Przykład – wykres $h(x)$



$$||h(x)|| = ||f(x) - g(x)|| \approx 0.142302494707577.$$

Norma L_2

Niech $f \in \mathcal{F}$. Norma L_2 jest określona wzorem

$$||f||^2 = \int\limits_a^b f^2(x)\ dx$$

czyli

$$||f|| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\ dx}.$$

Sprawdzenia, że jest to norma, wymaga tylko warunek 3

Norma L_2 – przykład

$$\int_0^5 h^2(x)\,dx = \frac{20331\sqrt{10}\,\operatorname{arc\,tg}\left(5\sqrt{10}\right) - 4050}{5020000}$$

$$\approx 0.01850184574525332,$$

czyli

$$||h(x)|| = \sqrt{\int_{-5}^{5} h^2(x)\,dx}$$

$$= \frac{\sqrt{20331\sqrt{10}\,\operatorname{arc\,tg}\left(5\sqrt{10}\right) - 4050}}{100\sqrt{251}}$$

$$\approx 0.1923634359500439$$

Norma L_2 – ogólnie

Klasa funkcji L_2 spełnia warunek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx < \infty.$$

Norma L_2 – ogólnie

Klasa funkcji L_2 spełnia warunek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx < \infty.$$

Norma

$$||f|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx}.$$

Norma L_1 – ogólnie

Podobnie definiuje się klasę L_1 spełniającą warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Norma L_1 – ogólnie

Podobnie definiuje się klasę L_1 spełniającą warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty.$$

Norma

$$||f|| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx.$$

Norma L_1 – przykład

$$\int_0^5 h(x)\ dx = \frac{9\ln 210}{200} \approx 0.2486453822609302$$

czyli

$$||h(x)|| = \int_{-5}^{5} |h(x)|\, dx \approx 0.4972907645218605$$

Wersje dyskretne

$$K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ a_i = f\left(x_i\right).$$

Wersje dyskretne

$K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $a_i = f(x_i)$.

Norma jednostajna:

$$||f|| = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Wersje dyskretne

$K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $a_i = f(x_i)$.

Norma jednostajna:

$$||f|| = \sup \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Norma L_2:

$$||f|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Wersje dyskretne

$K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $a_i = f(x_i)$.

Norma jednostajna:

$$||f|| = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Norma L_2:

$$||f|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Norma L_1:

$$||f|| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Szereg potęgowy

Szereg potęgowy ma postać

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

dla $x \in (-r, r)$, gdzie r jest promieniem zbieżności szeregu.
Dla $x \notin [-r, r]$ szereg jest rozbieżny, więc nie definiuje funkcji f.

Szereg taki można zapisać w postaci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \theta_n,$$

gdzie θ_n jest resztą.

Szereg potęgowy jako przybliżenie

Jeśli

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \theta_n,$$

oraz $x \in (-r, r)$, to

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

Szereg potęgowy jako przybliżenie

Jeśli

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \theta_n,$$

oraz $x \in (-r, r)$, to

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

Szczegóły i przykłady:
K. Selwat. Wybrane zagadnienia matematyki. Legnica 2011. str. 99–104.

Szereg trygonometryczny

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

dla $x \in [-\pi, \pi]$, o ile szereg jest zbieżny.

Funkcja $f(x)$ jest okresowa o okresie 2π.

Szereg trygonometryczny

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

dla $x \in [-\pi, \pi]$, o ile szereg jest zbieżny.

Funkcja $f(x)$ jest okresowa o okresie 2π.

Biorąc tylko początkowe wyrazy sumy, otrzymujemy przybliżenie funkcji $f(x)$.

Szereg trygonometryczny – przykład

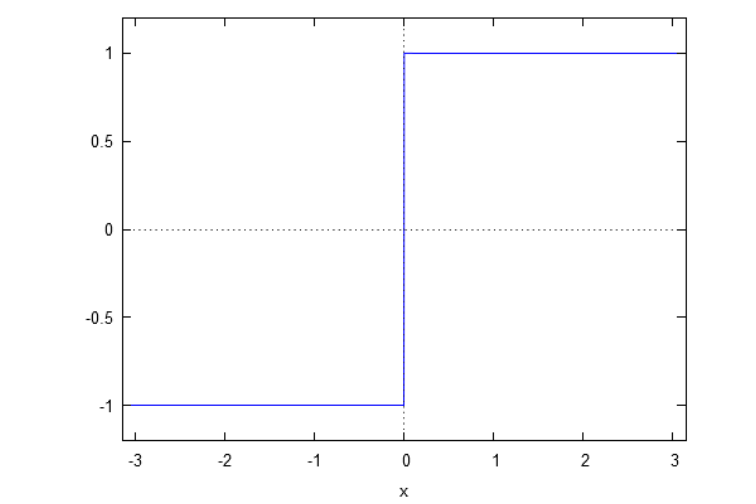
Funkcja $\operatorname{sgn}(x)$ – znak:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Ograniczamy ja do dziedziny $(-\pi, \pi)$ dostając

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, \pi), \\ -1 & \text{dla } x \in (-\pi, 0), \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykres funkcji $f(x)$



Szereg trygonometryczny – przykład c.d.

Można obliczyć (pominiemy to zagadnienie), że

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 2i, \\ \frac{4}{k\pi} & \text{dla } k = 2i + 1. \end{cases}$$

Wtedy

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1} \sin\left((2k+1)x\right).$$

Przykład – przybliżenia

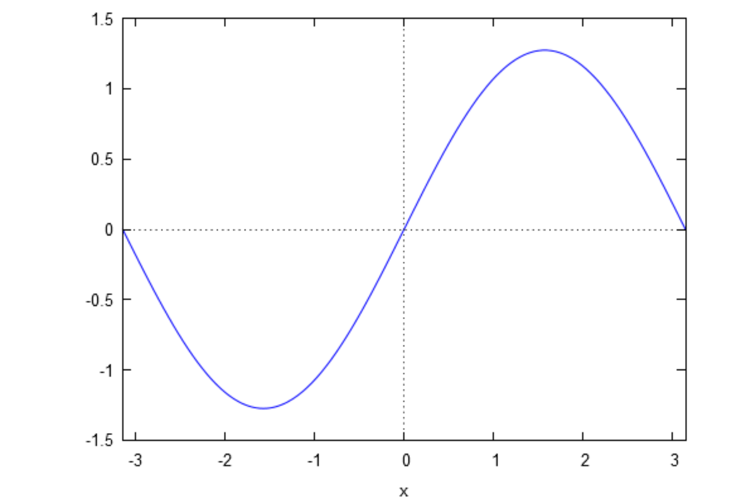
Oznaczając

$$s(k,x) = b_k \sin(kx)$$

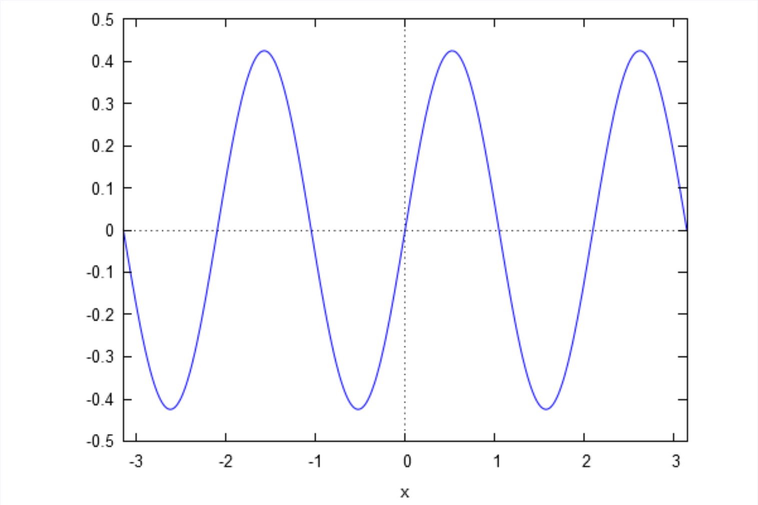
otrzymujemy

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} s(2k+1,x).$$

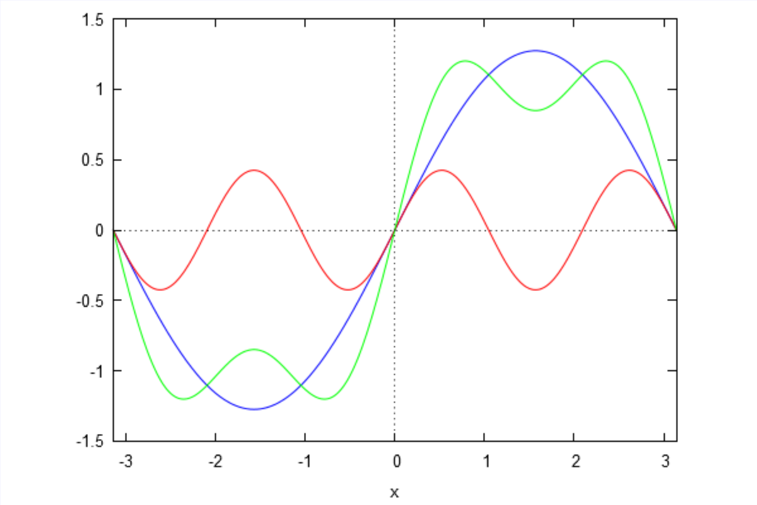
Wykres $s(1, x)$



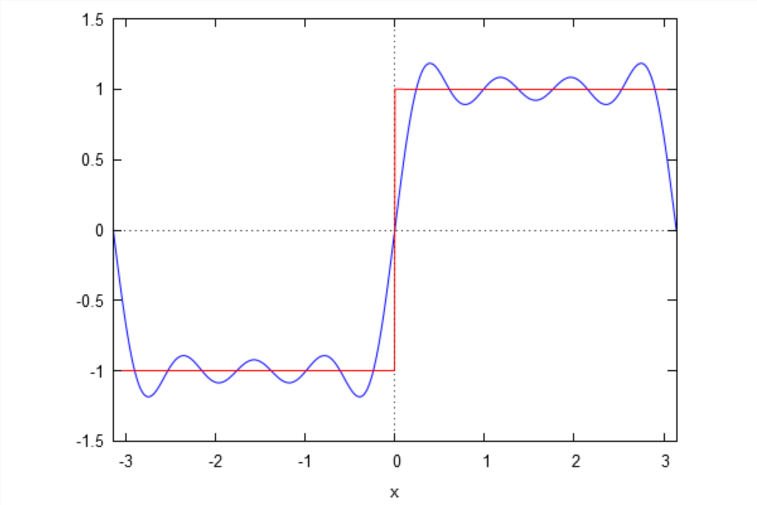
Wykres $s(3, x)$



Wykres $s(1,x)$, $s(3,x)$, $s(1,x)+s(3,x)$



Wykres $s(1, x) + s(3, x) + s(5, x) + s(7, x)$



Cel aproksymacji jednostajnej

Celem aproksymacji jednostajnej jest minimalizacja największego błędu. Nie zawsze jest to dobre kryterium.

Cel aproksymacji jednostajnej

Celem aproksymacji jednostajnej jest minimalizacja największego błędu. Nie zawsze jest to dobre kryterium.

Aproksymując funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, \pi), \\ -1 & \text{dla } x \in (-\pi, 0), \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

funkcją

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{k+1} \sin((k+1)x)$$

zawsze mamy

$$\sup_{x \in (-\pi, \pi)} (F(x) - f(x)) = 1.$$

Aproksymacja szeregami potęgowymi

Przybliżenie funkcji $f(x)$ przez $F(x)$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = F(x).$$

jest jednostajne, tzn. współczynniki a_k w rozwinięciu funkcji w szereg potęgowy, minimalizują normę jednostajną $||F(x) - f(x)||$.

Wielomiany Czebyszewa

Definicja rekurencyjna

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1, \\
T_1(x) &= x, \\
T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2
\end{aligned}
$$

Wielomiany Czebyszewa

Definicja rekurencyjna

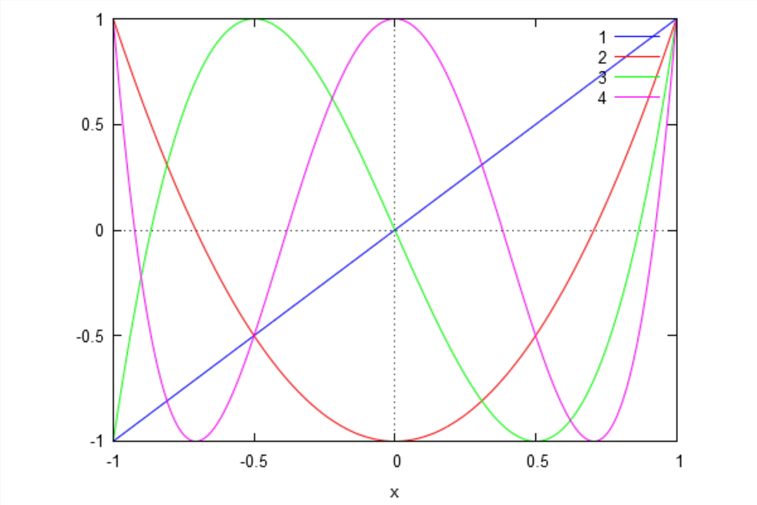
$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

W przedziale $[-1, 1]$ wielomiany Czebyszewa wyrażają się wzorem

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

dla $n \geq 0$.

Wielomiany Czebyszewa – wykresy



Aproksymacja szeregami Czebyszewa

$$f(x) \approx \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} c_j T_j(x),$$

gdzie

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Norma L_2 z wagą

Niech $w(x) \geq 0$.

Normy dla przypadku ciągłego i dyskretnego:

$$||f(x)||^2 = \int_a^b w(x) f^2(x)\, dx$$

lub

$$||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} w(x_i) f^2(x_i).$$

Zadanie aproksymacji – ogólnie

Dla danego zbioru punktów (x_k, y_k), gdzie $y_k = f(x_k)$, szukamy funkcji $F(x)$ takiej, że

$$||F(x) - f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)\left(F(x_i) - y_i\right)^2$$

osiąga minimum.

Przypadek najprostszy: $w(x) \equiv 1$.

Aproksymacja liniowa

Zakładamy, że $F(x) = ax + b$ i szukamy takich a i b, aby funkcja $h(a, b)$

$$h(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

osiągnęło minimum.

Aproksymacja liniowa

Zakładamy, że $F(x) = ax + b$ i szukamy takich a i b, aby funkcja $h(a, b)$

$$h(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

osiągnęło minimum.

Obliczymy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) x_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b).$$

Równania

Szukamy miejsc zerowych pochodnych, czyli rozwiązujemy układ równań

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)\, x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0.$$

Równania

Szukamy miejsc zerowych pochodnych, czyli rozwiązujemy układ równań

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)\, x_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0.$$

Równania:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0.$$

Równania c.d.

Stąd

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Rozwiązanie układu

Oznaczmy:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,, \quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i \,, \quad C = \sum_{i=1}^{n} y_i \,, \quad D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,.$$

Rozwiązanie układu

Oznaczmy:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i\,, \quad C = \sum_{i=1}^{n} y_i\,, \quad D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,.$$

Otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$a = (A - bB)\,/D,$$
$$b = (C - aB)\,/n.$$

Rozwiązanie układu

Oznaczmy:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i\,, \quad C = \sum_{i=1}^{n} y_i\,, \quad D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,.$$

Otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$a = (A - bB)\,/D,$$
$$b = (C - aB)\,/n.$$

Stąd dostajemy

$$a = \frac{nA - BC}{nD - B^2}\,, \quad b = \frac{CD - AB}{nD - B^2}\,.$$

Przykład

Dane:

x_k	1.1	1.4	1.8	2.5	2.8	3.0
y_k	2.1	2.3	2.9	3.2	3.6	4.2

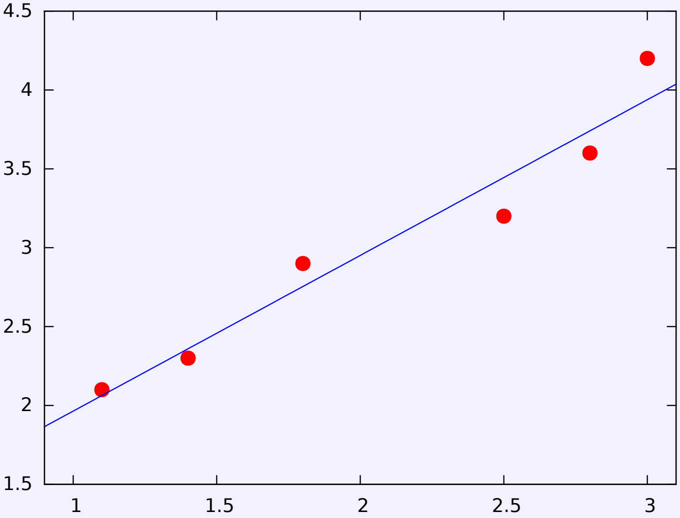
Przykład

Dane:

x_k	1.1	1.4	1.8	2.5	2.8	3.0
y_k	2.1	2.3	2.9	3.2	3.6	4.2

$a = 0.9868421052631559, \; b = 0.9776315789473676.$

Wykres



Aproksymacja wielomianem

Zakładamy, że

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x).$$

Zakładamy dalej (szczególny przypadek), że

$$\varphi_k(x) = x^k, \quad w(x) \equiv 1.$$

czyli aproksymujemy $f(x)$ wielomianem stopnia m.

Minimalizujemy funkcję

$$h(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i x^i - y_i \right)^2.$$

Równania

$$h\left(a_0, a_1, \ldots, a_m\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i x^i - y_i \right)^2 .$$

Dla i$= 0, 1, \ldots, m$, układ $m+1$ równań z $m+1$ niewiadomymi:

$$\frac{\partial h}{\partial a_i} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x^j - y_i \right) x^i = 0$$

Aproksymacja wielomianem – przykład (1)

Dane:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	2	2.48	2.84	3.00	2.91

Szukamy wielomianu aproksymującego w postaci $F(x) = ax^2 + bx + c$. Układ równań jest w tym przypadku układem trzech równań z trzema niewiadomymi a, b, c:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} .$$

Aproksymacja wielomianem – przykład (2)

Po podstawieniu danych z tabeli otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} 22.125a + 12.5b + 7.5c = 21.85 \\ 12.5a + 7.5b + 5c = 14.4 \\ 7.5a + 5b + 5c = 13.23 \end{cases}.$$

Aproksymacja wielomianem – przykład (2)

Po podstawieniu danych z tabeli otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} 22.125a + 12.5b + 7.5c = 21.85 \\ 12.5a + 7.5b + 5c = 14.4 \\ 7.5a + 5b + 5c = 13.23 \end{cases}.$$

Rozwiązanie tego układu znajdujemy np. metodą eliminacji Gaussa. Dokładnym rozwiązaniem jest trójka

$$a = -\frac{67}{175}, \quad b = \frac{2159}{1750}, \quad c = \frac{6953}{3500}.$$

Aproksymacja wielomianem – przykład (2)

Po podstawieniu danych z tabeli otrzymujemy układ:

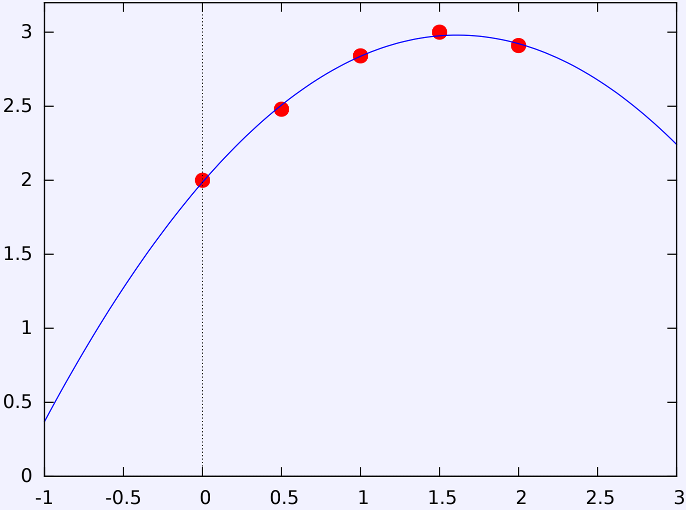
$$\begin{cases} 22.125a + 12.5b + 7.5c = 21.85 \\ 12.5a + 7.5b + 5c = 14.4 \\ 7.5a + 5b + 5c = 13.23 \end{cases}.$$

Rozwiązanie tego układu znajdujemy np. metodą eliminacji Gaussa. Dokładnym rozwiązaniem jest trójka

$$a = -\frac{67}{175}, \quad b = \frac{2159}{1750}, \quad c = \frac{6953}{3500}.$$

$$F(x) = -\frac{67}{175}x^2 + \frac{2159}{1750}x + \frac{6953}{3500}.$$

Wykres



Obliczenia – *Maxima*

```
(%i1) linsolve([22.125*a+12.5*b+7.5*c=21.85,
          12.5*a+7.5*b+5*c=14.4,
          7.5*a+5*b+5*c=13.23], [a,b,c]);
(%o1) [a=-67/175,b=2159/1750,c=6953/3500]

(%i2) F(x):=-(67/175)*x^2+(2159/1750)*x+6953/3500;
(%o2) F(x):=(-67/175)*x^2+2159/1750*x+6953/3500

(%i3) d:[[0,2],[0.5,2.48],[1,2.84],[1.5,3],[2,2.91]];
(%o3) [[0,2],[0.5,2.48],[1,2.84],[1.5,3],[2,2.91]]

(%i4) plot2d([[discrete, d], F(x)], [x,-1,3],[y,0,3.2],
         [style, points, lines], [color, red, blue],
         [point_type, bullet],
         [legend,false],[xlabel," "],
         [pdf_file,"./apro-sqr.pdf"]);
(%o4) ["C:/Users/AMD/AppData/Local/Temp/maxout7312.gnuplot","./a
```