Metody Numeryczne

Wykład 4

Interpolacja

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Definicja interpolacji

Dane są punkty $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.
Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Trzeba wyznaczyć krzywą przechodzącą przez punkty (x_i, y_i) i spełniającą dane warunki.

Definicja interpolacji

Dane są punkty $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.
Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Trzeba wyznaczyć krzywą przechodzącą przez punkty (x_i, y_i) i spełniającą dane warunki.

Jeżeli założy się, że z warunku $y_i \neq y_j$ wynika $x_i \neq x_j$, to trzeba wyznaczyć funkcję interpolującą $f(x)$ spełniającą dane warunki taką, że $f(x_i) = y_i$.

Definicja interpolacji

Dane są punkty $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.
Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Trzeba wyznaczyć krzywą przechodzącą przez punkty (x_i, y_i) i spełniającą dane warunki.

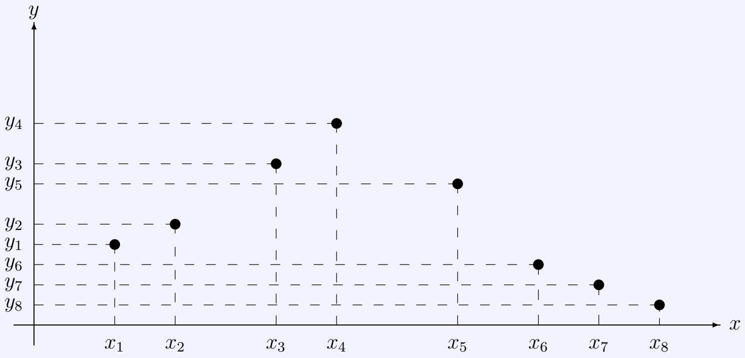
Jeżeli założy się, że z warunku $y_i \neq y_j$ wynika $x_i \neq x_j$, to trzeba wyznaczyć funkcję interpolującą $f(x)$ spełniającą dane warunki taką, że $f(x_i) = y_i$.

Przykłady warunków dla funkcji interpolującej:

- ciągłość,
- różniczkowalność,
- istnienie drugiej pochodnej,
- szczególna postać funkcji, np. wielomian.

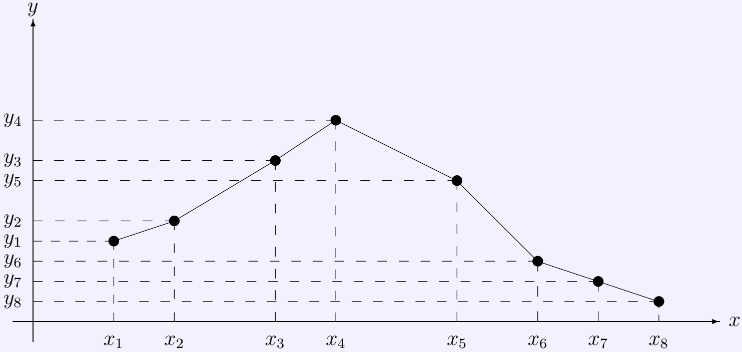
Przykład

Punkty (x_i, y_i):



Przykład c.d.

Punkty (x_i, y_i) połączone odcinkami:



Trzy punkty

Zadanie.
Dane są punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, $x_1 < x_2 < x_3$.
Wyznaczyć funkcję

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

taką, aby

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3 \end{aligned}$$

Jest to układ trzech równań o trzech niewiadomych a, b, c.

Trzy punkty c.d.

Macierz współczynników

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

ma wyznacznik

$$\det A = -\left(x_2 - x_1\right)\left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right) \neq 0.$$

Trzy punkty c.d.

Macierz współczynników

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

ma wyznacznik

$$\det A = -(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \neq 0.$$

Rozwiązanie a, b, c zawsze istnieje i jest jedyne.

Zadanie interpolacji

Zadanie
Dla punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n)$ wyznaczyć wielomian $p(x)$ stopnia niewiększego niż n, którego wykres przechodzi przez wszystkie punkty (x_i, y_i).

Punkty (x_i, y_i) – węzły.

Zadanie interpolacji

Zadanie
Dla punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n)$ wyznaczyć wielomian $p(x)$ stopnia niewiększego niż n, którego wykres przechodzi przez wszystkie punkty (x_i, y_i).

Punkty (x_i, y_i) – węzły.

Wielomian $p(x)$ jest wyznaczony jednoznacznie.

Ilorazy różnicowe

Dane są węzły $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n)$, gdzie x_i są parami różne.
Wyrażenia

$$f(x_0; x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$
$$f(x_1; x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$
$$\ldots$$
$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}},$$

nazywamy *ilorazami różnicowymi pierwszego rzędu*.

Ilorazy różnicowe c.d.

Analogicznie definiujemy *ilorazy różnicowe rzędu drugiego*:

$$f\,(x_0; x_1; x_2) = \frac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{x_2 - x_0},$$

$$\ldots$$

$$f\,(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}.$$

Ilorazy różnicowe c.d.

Rekurencyjnie definiujemy *iloraz różnicowy rzędu* k:

$$f\left(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}\right) = \frac{f\left(x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}\right) - f\left(x_i; \ldots; x_{i+k-1}\right)}{x_{i+k} - x_i}$$

dla $k = 1, 2, \ldots$ oraz $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Wzór interpolacyjny Newtona

Dane są węzły $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n)$, gdzie x_i są parami różne.
Wielomiany $p_k(x)$ budujemy dla kolejnych k: $p_0(x) = y_0$.

$$
\begin{aligned}
p_k(x) &= y_0 + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\
&\quad + \ldots + f(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_k)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}) \\
&= y_0 + \sum_{i=1}^{k} f(x_0; \ldots; x_i) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)
\end{aligned}
$$

Przykład

Dla $n = 3$ i punktów

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

otrzymuje się

Przykład

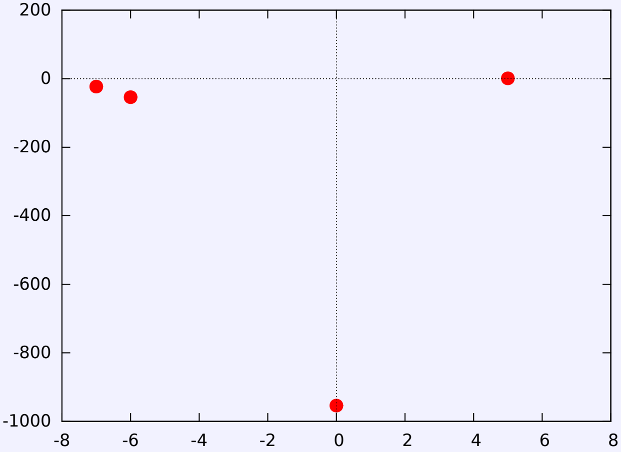
Dla $n = 3$ i punktów

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

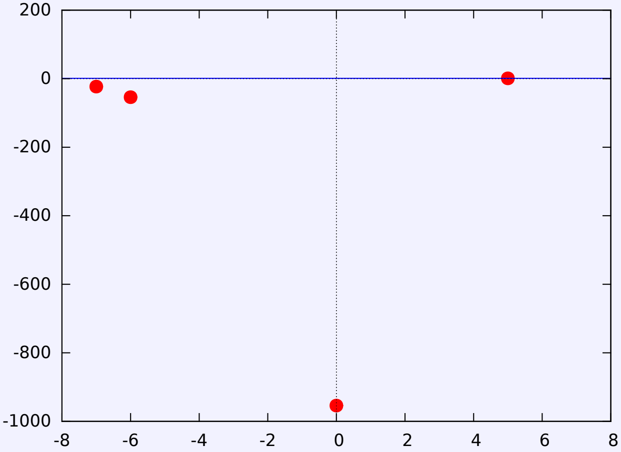
otrzymuje się

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1 + 2(x-5) + 3(x-5)(x+7) + 4(x-5)(x+7)(x+6) \\ &= 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954. \end{aligned}$$

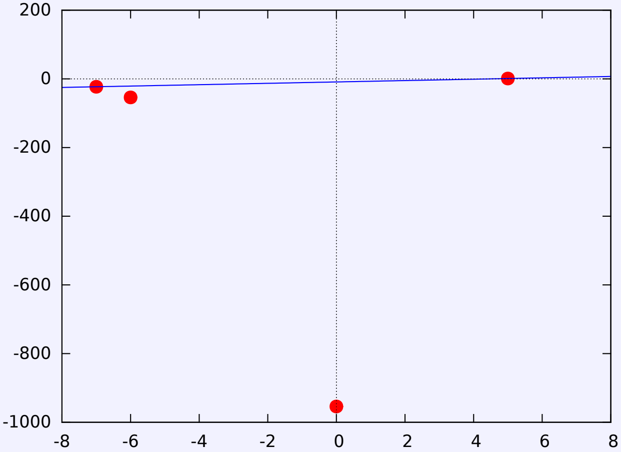
Interpolacja $k = 0$



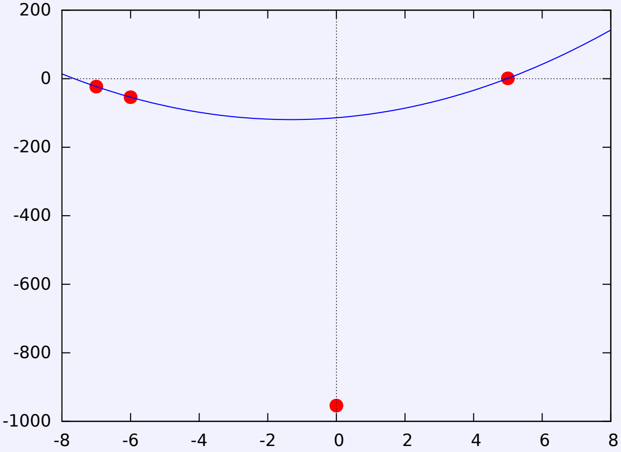
Interpolacja $k = 1$



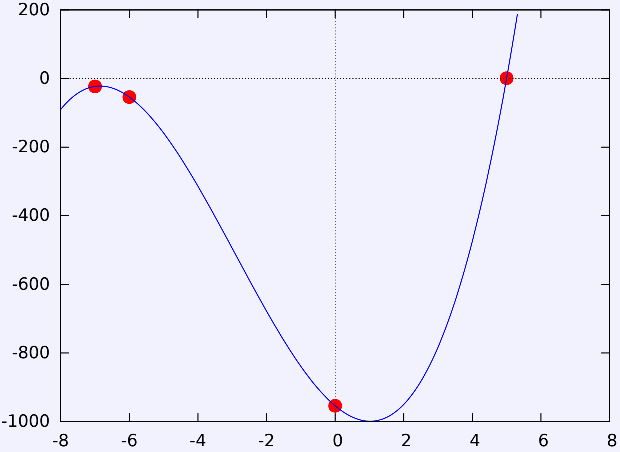
Interpolacja $k = 2$



Interpolacja $k = 3$



Interpolacja $k = 3$



Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Wielomian $p(x)$ wyraża się jako suma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

gdzie

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Przykład

Dla $n = 3$ i punktów

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

otrzymuje się następujące wielomiany Lagrange'a

$$l_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x,$$

$$l_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6).$$

Przykład c.d.

Punkty:

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

Przykład c.d.

Punkty:

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

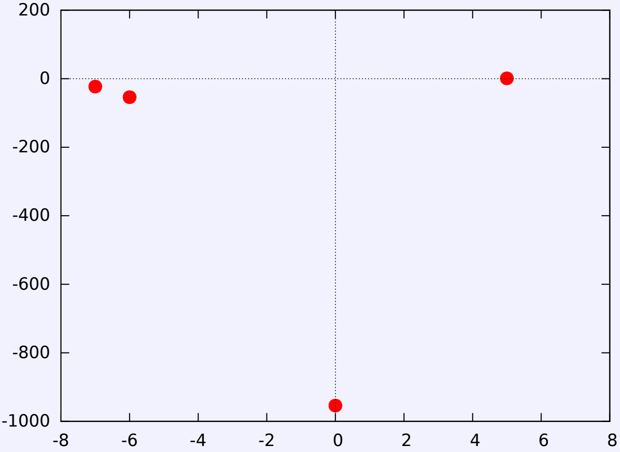
Wielomian interpolacyjny

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x),$$

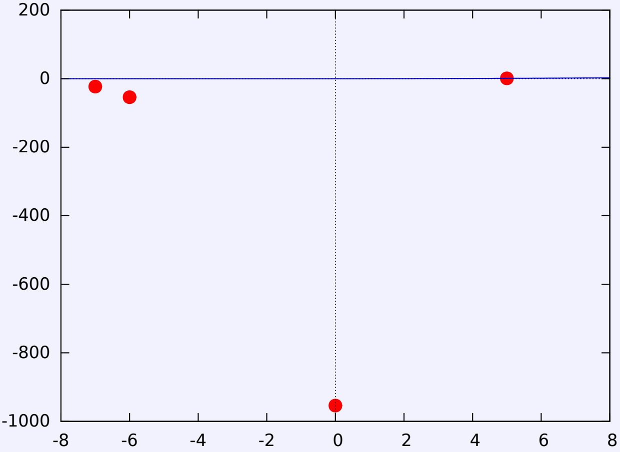
więc

$$\begin{aligned} p(x) &= l_0(x) - 23 l_1(x) - 54 l_2(x) - 954 l_3(x) \\ &= 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954. \end{aligned}$$

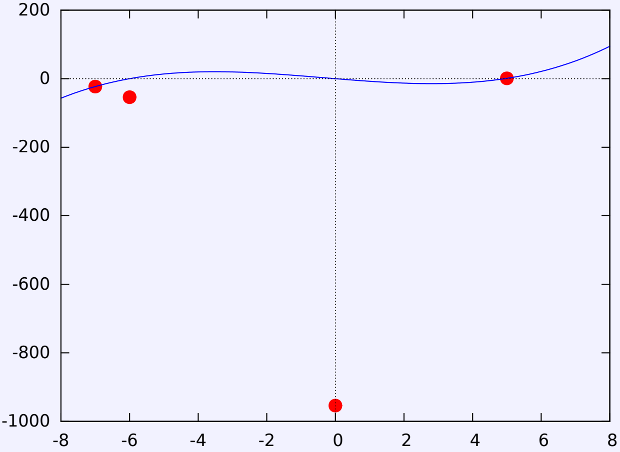
Interpolacja $k = 0$



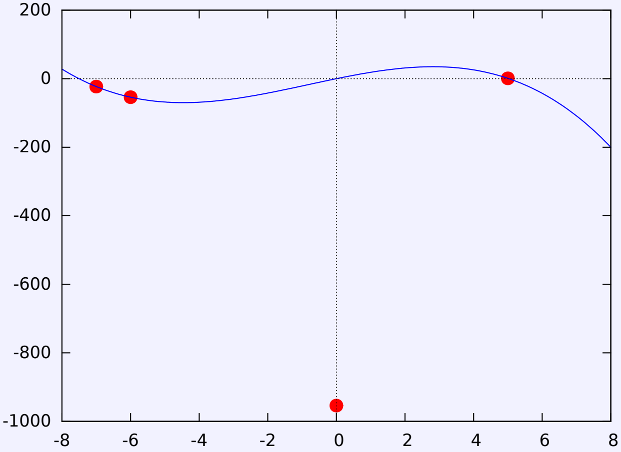
Interpolacja $k = 1$



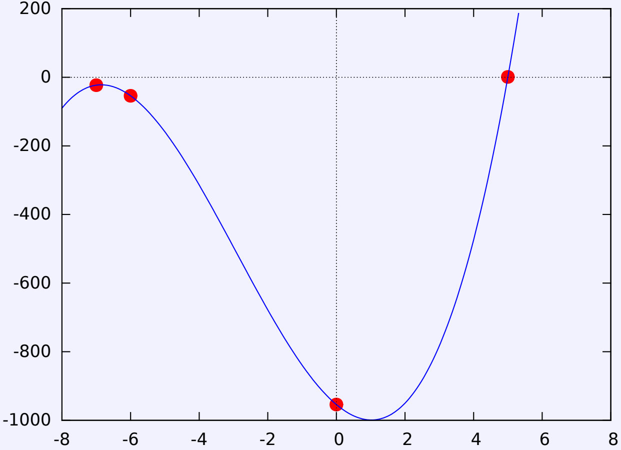
Interpolacja $k = 2$



Interpolacja $k = 3$



Interpolacja $k = 4$

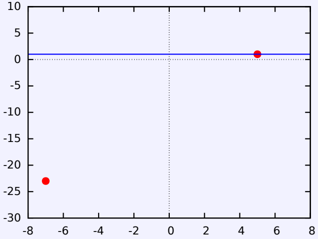


Interpolacja $k = 1$ ponownie

Pierwsze kroki w obu metodach interpolacji dla n danych punktów, są różne.
W metodzie Newtona w kolejnych krokach otrzymujemy interpolację wielomianami kolejnych stopni.
W metodzie Lagrange'a w każdym kroku interpolujemy wielomianami o tym samym stopniu $n-1$.
W rozpatrywanych tutaj przykładach widać to nawet w pierwszym kroku.

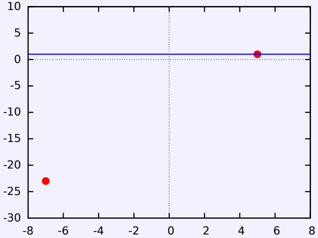
Interpolacja $k = 1$ ponownie

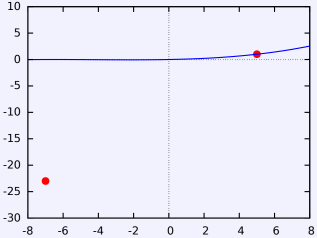
Pierwsze kroki w obu metodach interpolacji dla n danych punktów, są różne.
W metodzie Newtona w kolejnych krokach otrzymujemy interpolację wielomianami kolejnych stopni.
W metodzie Lagrange'a w każdym kroku interpolujemy wielomianami o tym samym stopniu $n-1$.
W rozpatrywanych tutaj przykładach widać to nawet w pierwszym kroku.



Interpolacja $k = 1$ ponownie

Pierwsze kroki w obu metodach interpolacji dla n danych punktów, są różne.
W metodzie Newtona w kolejnych krokach otrzymujemy interpolację wielomianami kolejnych stopni.
W metodzie Lagrange'a w każdym kroku interpolujemy wielomianami o tym samym stopniu $n - 1$.
W rozpatrywanych tutaj przykładach widać to nawet w pierwszym kroku.





Przykład

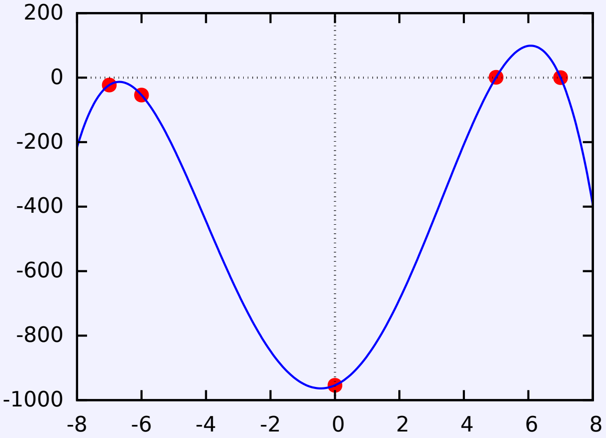
Dodany jeden punkt:

x	5	-7	-6	0	7
y	1	-23	-54	-954	0

Maxima.
Wielomian interpolacyjny:

$$p(x) = -\frac{1545x^4 + 2168x^3 - 124715x^2 - 110418x + 2430792}{2548}.$$

Wykres



Węzły interpolacyjne:

$$(-2,1),(-1,0),(0,4),(1,5),(2,1),(3,1).$$

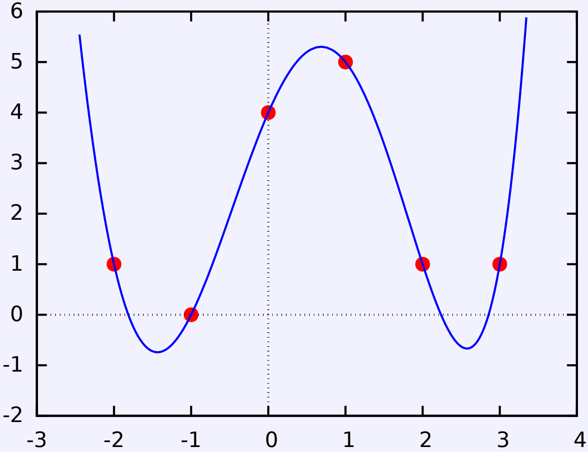
Maxima.

```
load("interpol")$
p:[[-2,1],[-1,0],[0,4],[1,5],[2,1],[3,1]]$
lagrange(p);
factor(%);
trigsimp(%);
```

Wielomian interpolacyjny:

$$p(x) = \frac{x^5 + 6x^4 - 25x^3 - 42x^2 + 84x + 96}{24}.$$

Wykres



Definicja funkcji sklejanych

Dane są węzły $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_n, y_n)$.
Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Definicja funkcji sklejanych

Dane są węzły $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n)$.
Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Funkcją sklejaną stopnia k jest funkcja $S(x)$ taka, że

1. w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, jest wielomianem stopnia nie wyższego niż k,
2. ma ciągłą $(k-1)$-szą pochodną w $[x_0, x_n]$.

Definicja funkcji sklejanych

Dane są węzły $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_n, y_n)$.
Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Funkcją sklejaną stopnia k jest funkcja $S(x)$ taka, że

1. w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, jest wielomianem stopnia nie wyższego niż k,
2. ma ciągłą $(k-1)$-szą pochodną w $[x_0, x_n]$.

Przykładem funkcji sklejanej stopnia pierwszego jest łamana łącząca węzły.

Definicja funkcji sklejanych

Dane są węzły $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n)$.
Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Funkcją sklejaną stopnia k jest funkcja $S(x)$ taka, że

1. w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, jest wielomianem stopnia nie wyższego niż k,
2. ma ciągłą $(k-1)$-szą pochodną w $[x_0, x_n]$.

Przykładem funkcji sklejanej stopnia pierwszego jest łamana łącząca węzły.
Jest ciągła, ale nawet pierwsza pochodna nie jest ciągła w całym przedziale $[x_1, x_8]$.

Funkcje sklejane stopnia trzeciego

Przyjmijmy $h_i = x_{i+1} - x_i$, $u_i = 2\left(h_{i-1} + h_i\right)$, $b_i = 6\left(y_{i+1} - y_i\right)/h_i$, $v_i = b_i - b_{i-1}$, $z_0 = z_n = 0$, a pozostałe parametry z_i wyznaczamy z równania

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Funkcje sklejane stopnia trzeciego

Przyjmijmy $h_i = x_{i+1} - x_i$, $u_i = 2\left(h_{i-1} + h_i\right)$, $b_i = 6\left(y_{i+1} - y_i\right)/h_i$, $v_i = b_i - b_{i-1}$, $z_0 = z_n = 0$, a pozostałe parametry z_i wyznaczamy z równania

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$S\left(x\right) = \frac{z_i}{6h_i}\left(x_{i+1} - x\right)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}\left(x - x_i\right)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)\left(x - x_i\right) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)\left(x_{i+1} - x\right).$$

Definicje krzywych Béziera

Krzywe Béziera zostały niezależnie opracowane przez Pierre'a Béziera, francuskiego inżyniera firmy Renault, oraz Paula de Casteljau, pracującego dla konkurencyjnej firmy Citroën.

Definicje krzywych Béziera

Krzywe Béziera zostały niezależnie opracowane przez Pierre'a Béziera, francuskiego inżyniera firmy Renault, oraz Paula de Casteljau, pracującego dla konkurencyjnej firmy Citroën.

Krzywe Béziera są krzywymi parametrycznymi, tzn. każda współrzędna punktu krzywej jest pewną funkcją rzeczywistą jednego parametru t. Aby określić krzywą na płaszczyźnie, potrzebne są dwie funkcje: $x(t)$ i $y(t)$. Przyjmuje się, że $t \in [0, 1]$.
Ze względu na rodzaj tych funkcji mówi się o krzywych wielomianowych oraz krzywych wymiernych.

Wielomianowe krzywe Béziera drugiego stopnia

Dane są punkty $P_i = (x_i, y_i)$ dla $i = 0, 1, 2$.

Punkty P_0 i P_2 leżą na końcach krzywej.

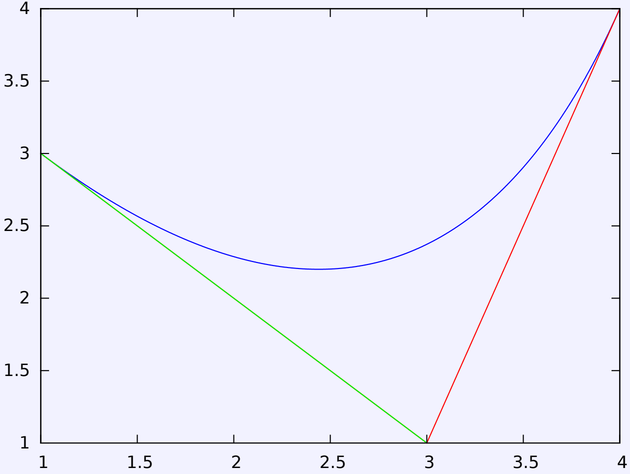
Punkt P_1 jest punktem kontrolnym. Krzywa jest w punktach P_0 i P_2 styczna do odcinków $\overline{P_0P_1}$ i $\overline{P_1P_2}$ odpowiednio.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (1-t)\left((1-t)\,x_0 + tx_1\right) + t\left((1-t)\,x_1 + tx_2\right), \\
y(t) &= (1-t)\left((1-t)\,y_0 + ty_1\right) + t\left((1-t)\,y_1 + ty_2\right),
\end{aligned}
$$

gdzie $t \in [0, 1]$.

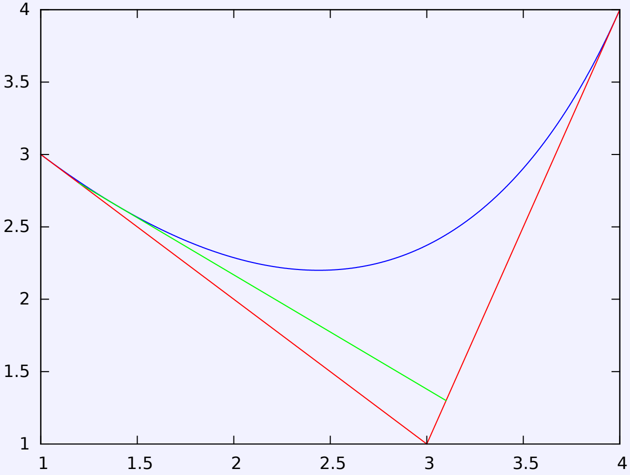
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

1.



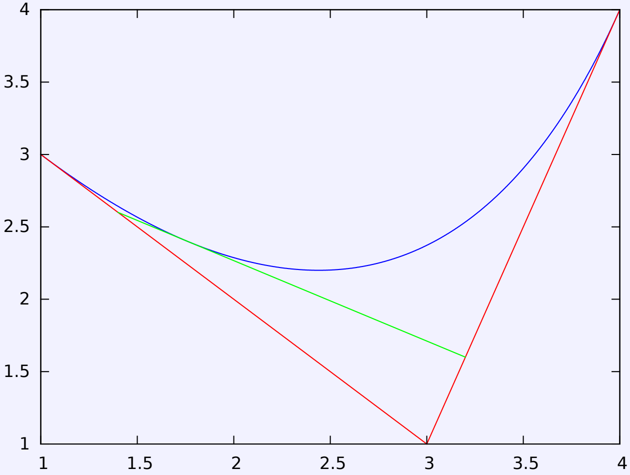
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

2.



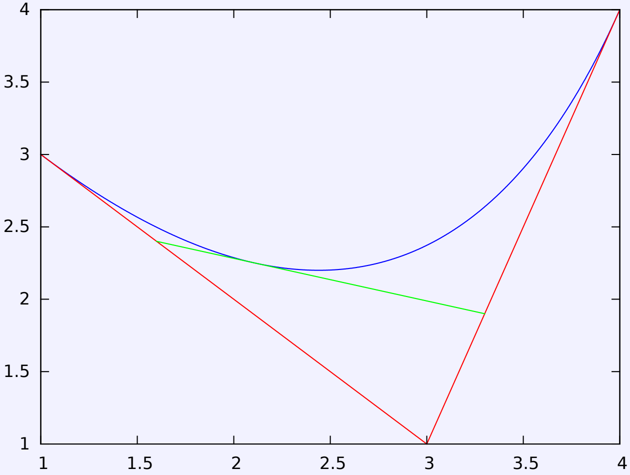
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

3.



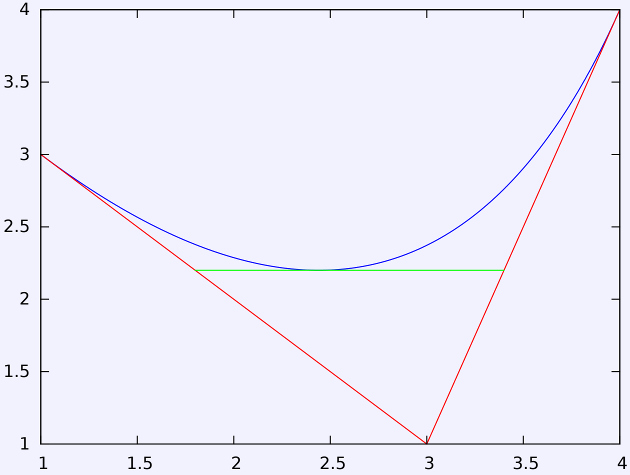
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

4.



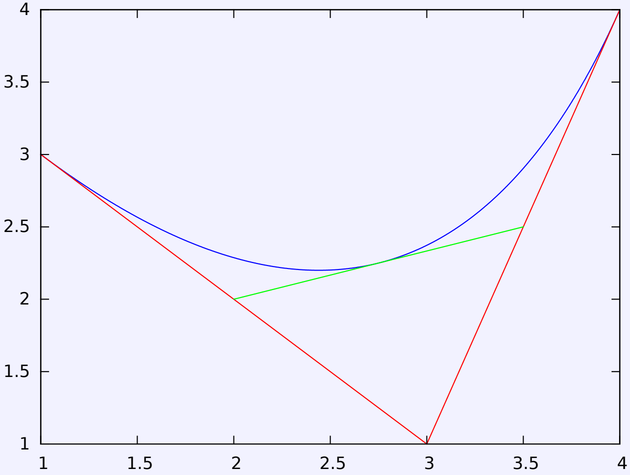
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

5.



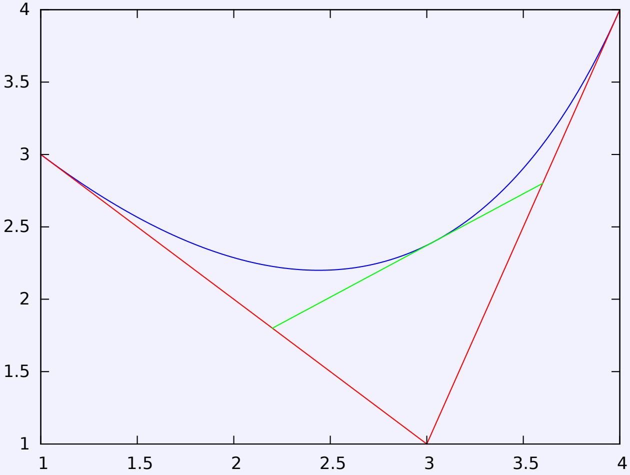
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

6.



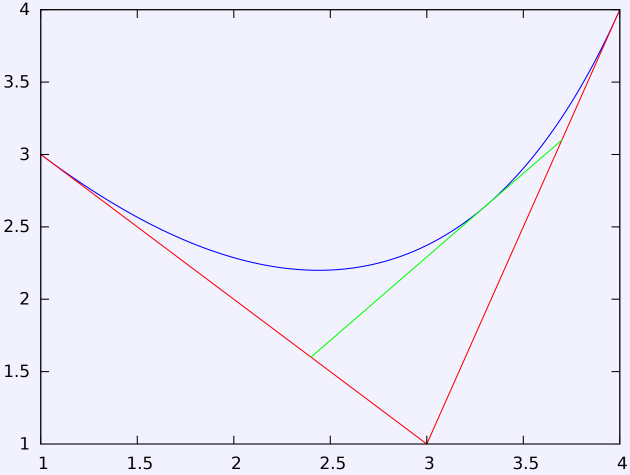
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

7.



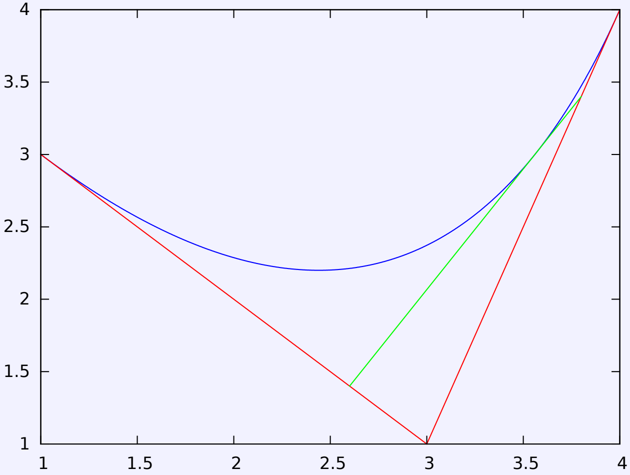
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

8.



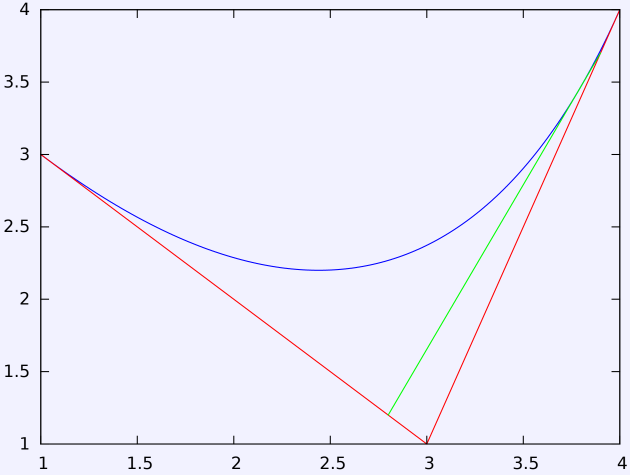
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

9.



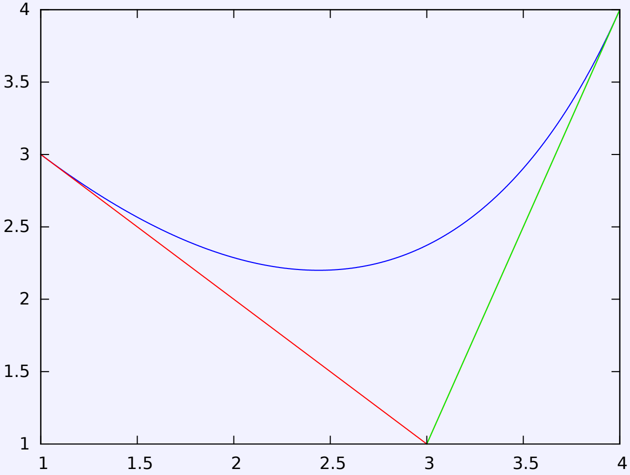
Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

10.



Przykład rysowania krzywej Béziera drugiego stopnia

11.



Wielomianowe krzywe Béziera trzeciego stopnia

Dane są punkty $P_i = (x_i, y_i)$ dla $i = 0, 1, 2, 3$.

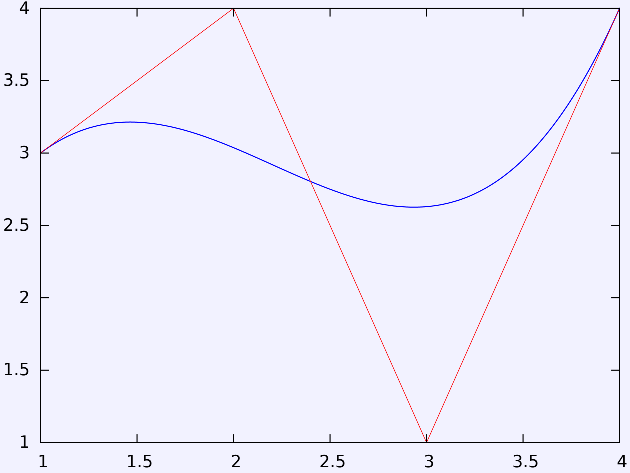
Punkty P_0 i P_3 leżą na końcach krzywej.

Punkty P_1 i P_2 są punktami kontrolnymi. Krzywa jest w punktach P_0 i P_3 styczna do odcinków $\overline{P_0 P_1}$ i $\overline{P_2 P_3}$ odpowiednio.

$$x(t) = x_0 (1-t)^3 + 3x_1 t (1-t)^2 + 3x_2 t^2 (1-t) + x_3 t^3,$$
$$y(t) = y_0 (1-t)^3 + 3y_1 t (1-t)^2 + 3y_2 t^2 (1-t) + y_3 t^3,$$

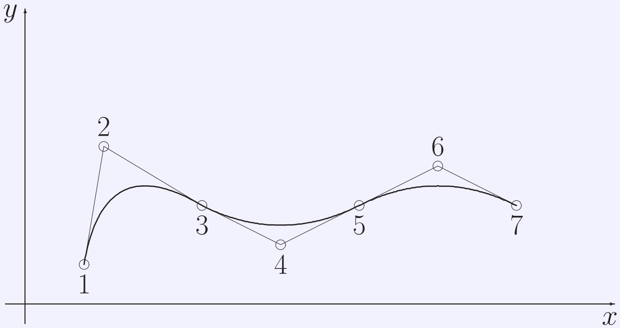
gdzie $t \in [0, 1]$.

Przykład funkcji Béziera trzeciego stopnia



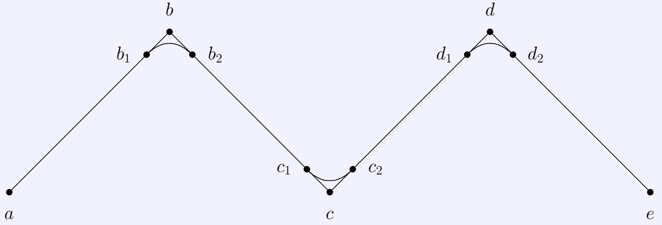
Przykład sklejanych funkcji Béziera

Przez punkty od lewej 1, 3, 5, 7 przechodzi sklejana krzywa Béziera, która jest krzywą gładką. Punkty 2, 4, 6 są punktami kontrolnymi.



Wygładzanie krzywej (1)

Zaokrąglanie ostrych zębów piły za pomocą krzywych Béziera drugiego stopnia.



Wygładzanie krzywej (2)

Zaokrąglanie tępych zębów piły za pomocą krzywych Béziera trzeciego stopnia.