Metody Numeryczne

Wykład 3
Równania nieliniowe

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Przykład – oczywiste zero

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Równanie $(x-1)^4 = 0$ ma jeden (poczwórny) pierwiastek $x = 1$.

Przykład – oczywiste zero

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

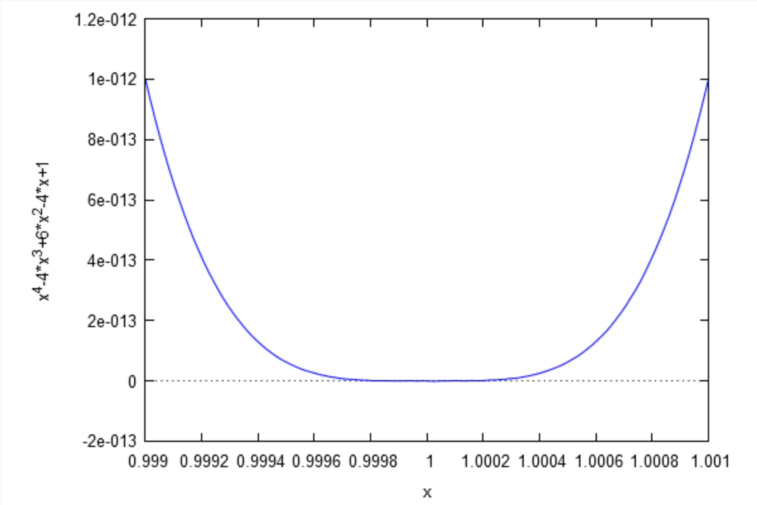
Równanie $(x-1)^4 = 0$ ma jeden (poczwórny) pierwiastek $x = 1$.

Dokładność w okolicy $x = 1$: obliczany

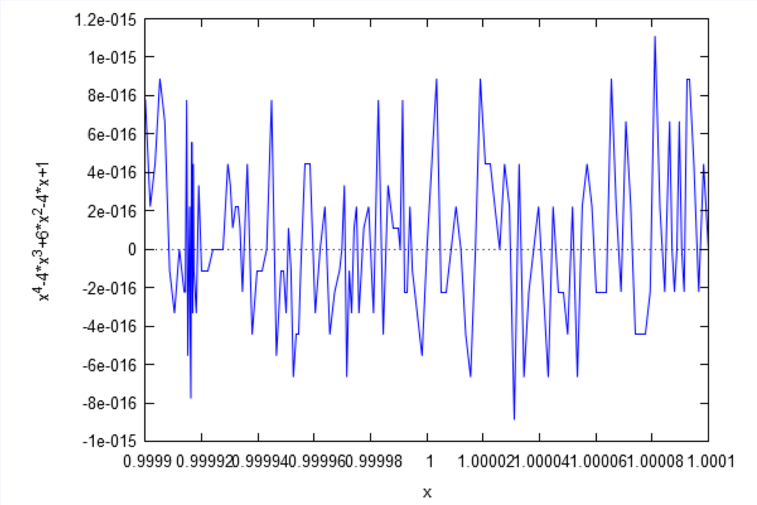
$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

dla $x = 0.999 \ldots 1.001$

Przykład – obliczone okolice bliskie zeru



Przykład – obliczone okolice bardzo bliskie zeru



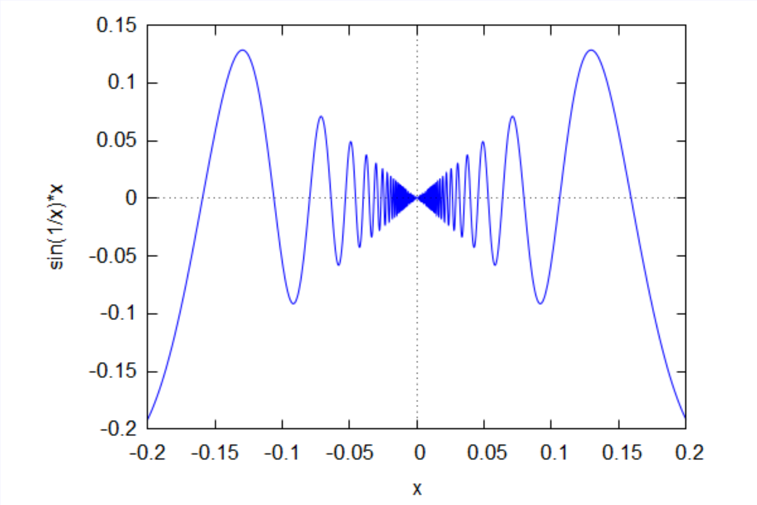
Przykład – nieskończenie wiele zer

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{dla } x \neq 0. \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

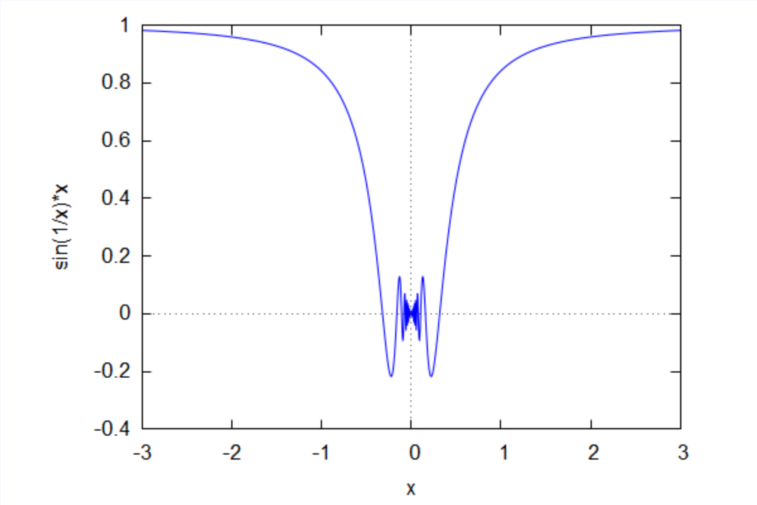
Pierwiastki:

- $x = 0$.
- $\sin(1/x) = 0 \implies 1/x = k\pi \implies x = 1/(k\pi)$.

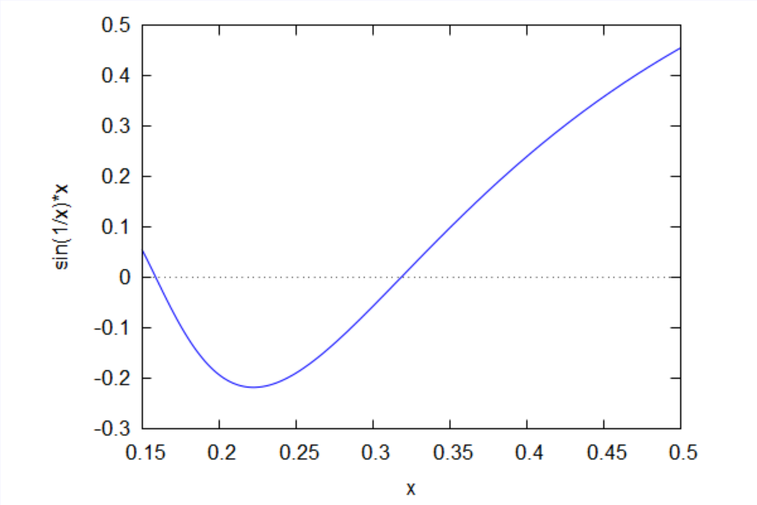
Bardzo nieprzyjemny przykład



Bardzo nieprzyjemny przykład c.d.



Bardzo nieprzyjemny przykład – lepsza część



Pierwiastki

Obliczenia *Maxima*

W przedziale $(0.15, 0.2)$: $x = 0.159154943091895$

```
find_root(x*\sin(1/x), x, 0.15, 0.2);
```

W przedziale $(0.3, 0.35)$: $x = 0.318309886183790$

```
find_root(x*\sin(1/x), x, 0.3, 0.35);
```

W przedziale $(0.0035, 0.0050)$: $x = 0.00497359197162173$

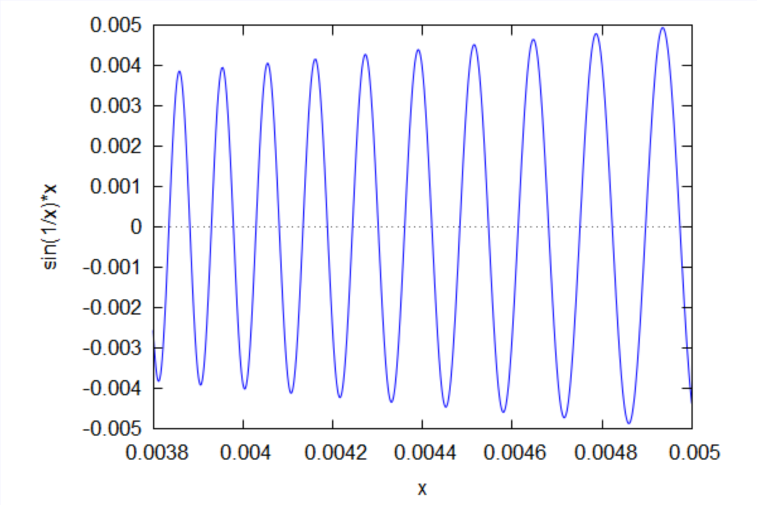
```
find_root(x*\sin(1/x), x, 0.0035, 0.005);
```

W przedziale $(0.0038, 0.0050)$: $x =???$

```
find_root(x*\sin(1/x), x, 0.0038, 0.0050);

find_root: function has same
 sign at endpoints:
f(0.0038)=-0.0025507338840040029,
f(0.005)=-0.0043664864860 69973
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Wyjaśnienie problemu



Zasady

Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz $f(a)f(b) < 0$, to istnieje $r \in (a, b)$ takie, że $f(r) = 0$.

Zasady

Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) f(b) < 0$, to istnieje $r \in (a, b)$ takie, że $f(r) = 0$.
Stąd algorytm:

Zasady

Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) f(b) < 0$, to istnieje $r \in (a, b)$ takie, że $f(r) = 0$.
Stąd algorytm:

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na pół punktem $c = a + (b - a)/2$.

Zasady

Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) f(b) < 0$, to istnieje $r \in (a, b)$ takie, że $f(r) = 0$.

Stąd algorytm:

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na pół punktem $c = a + (b - a)/2$.
2. Sprawdzamy, czy $f(a) f(c) < 0$ czy $f(c) f(b) < 0$.

Zasady

Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) f(b) < 0$, to istnieje $r \in (a, b)$ takie, że $f(r) = 0$.

Stąd algorytm:

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na pół punktem $c = a + (b - a)/2$.
2. Sprawdzamy, czy $f(a) f(c) < 0$ czy $f(c) f(b) < 0$.
3. Powtarzamy postępowanie tak długo, aż przedział w którym znajduje się zero, ma długość mniejszą niż zadana dokładność.

Przykład

$$f\left(x\right) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0$$

w przedziale $[-3.2, 3.2]$.

Przykład

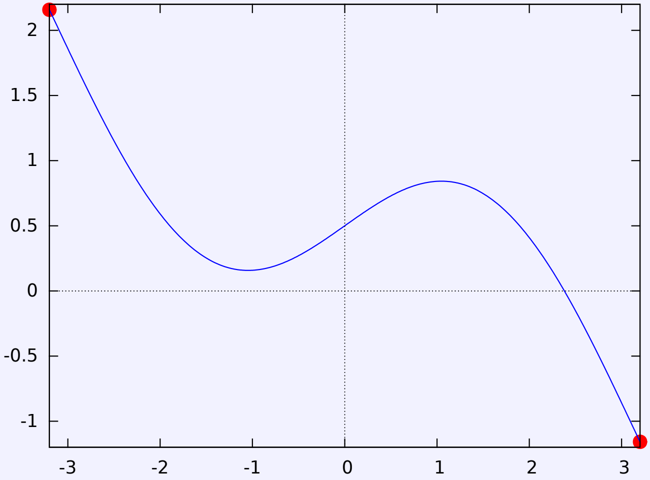
$$f(x) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0$$

w przedziale $[-3.2, 3.2]$.

Rozwiązanie: $r \approx 2.380061273139339$

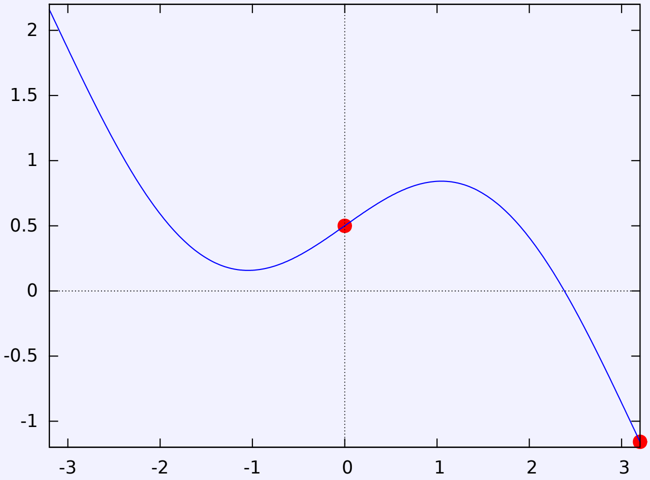
Funkcja $f(x)$

Wykres w przedziale $[-3.2, 3.2]$.



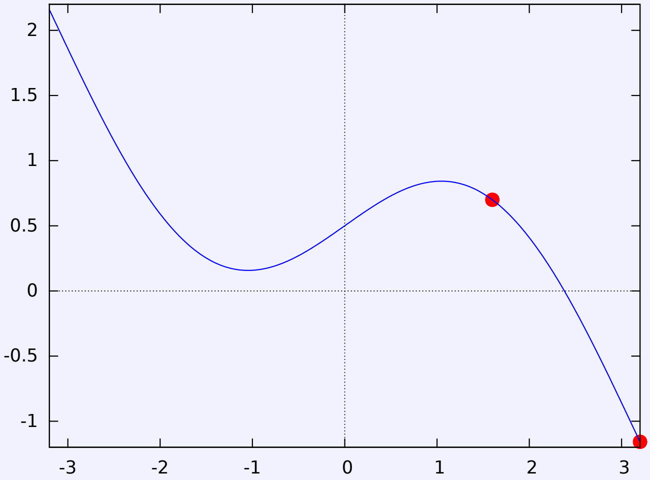
Podział (1)

$[0, 3.2]$:



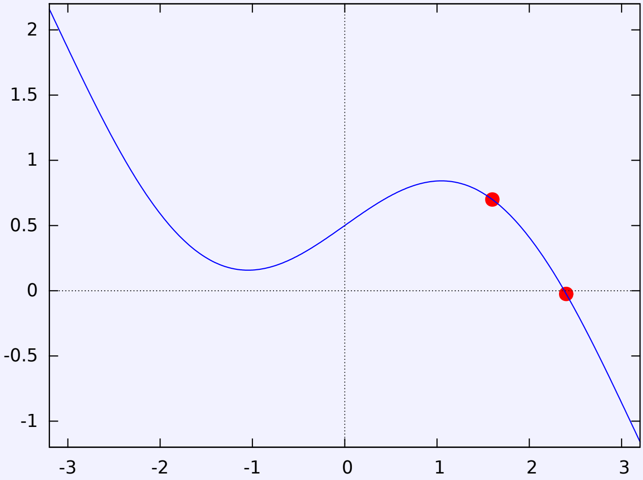
Przykład – podział (2)

$[1.6, 3.2]$:



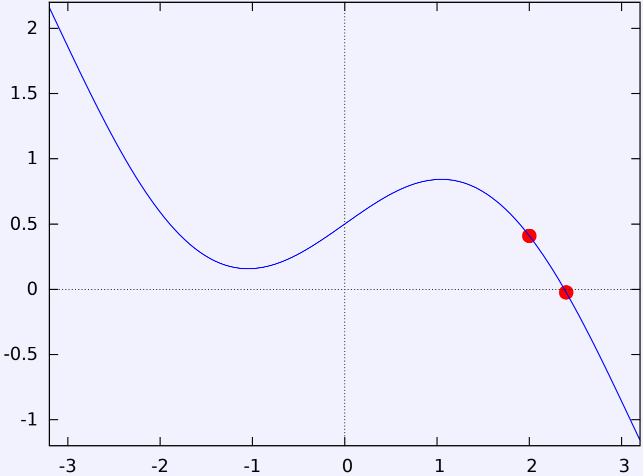
Przykład – podział (3)

$[1.6, 2.4]$:



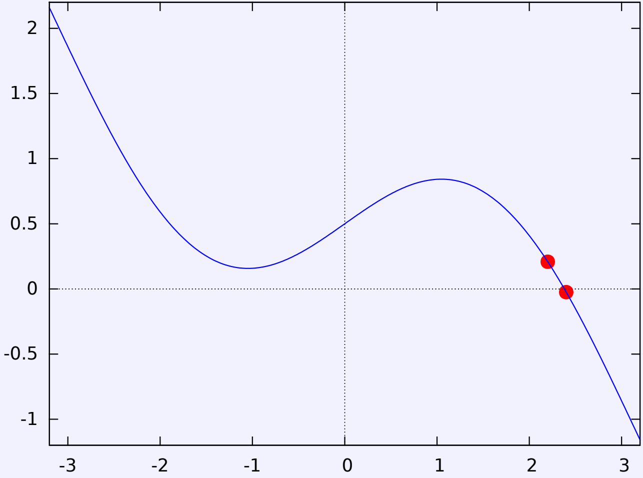
Przykład – podział (4)

$[2.3, 2.4]$:



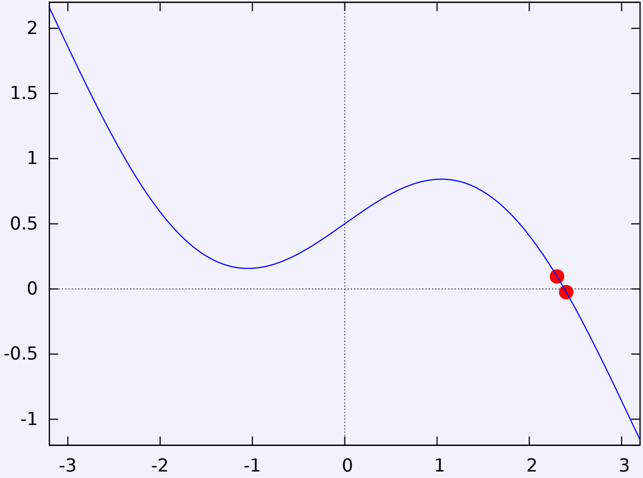
Przykład – podział (5)

$[2.35, 2.4]$:



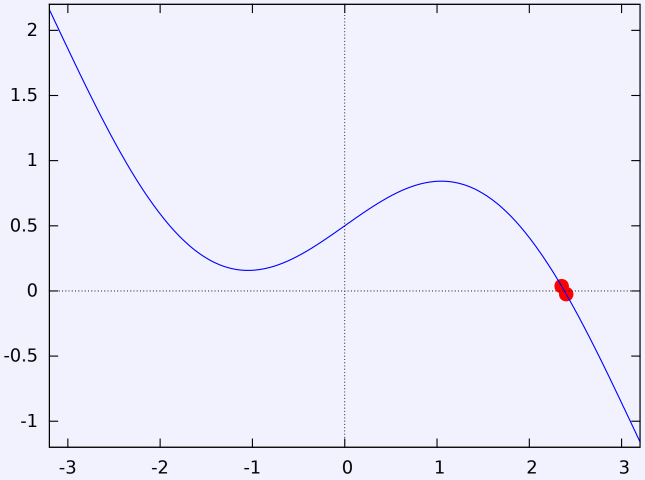
Przykład – podział (6)

$[2.375, 2.4]$:



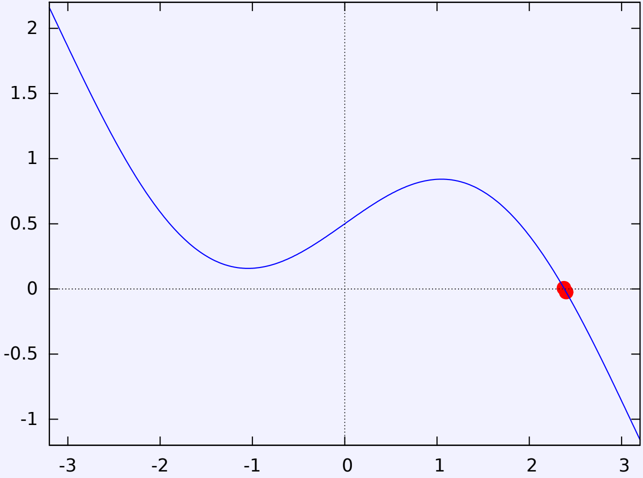
Przykład – podział (7)

$[2.375, 2.3875]$:

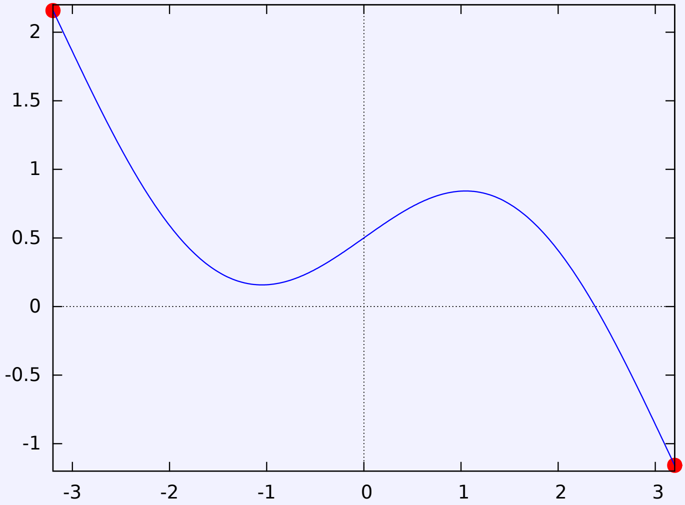


Przykład – podział (8)

$[2.375, 2.381]$:



Metoda bisekcji – animacja



Metoda bisekcji – kolejne przybliżenia

x_i	$f(x_i)$
0.00000	0.5000
1.60000	0.6995
2.40000	−0.0245
2.00000	0.4093
2.20000	0.2085
2.30000	0.0957
2.35000	0.0365
2.37500	0.0062
2.38125	−0.0015

Metoda Newtona

Zakładamy, że istnieje druga pochodna funkcji $f(x)$
Niech x_0 będzie przybliżeniem zera r tej funkcji.
Wyznaczamy kolejne przybliżenia zera r:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Przykład 1

$$f(x) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0$$

w przedziale $[1, 3]$.

Przykład 1

$$f\left(x\right) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0$$

w przedziale $[1, 3]$.

Pochodna

$$f'\left(x\right) = \cos x - \frac{1}{2}.$$

Przykład 1

$$f(x) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0$$

w przedziale $[1, 3]$.

Pochodna

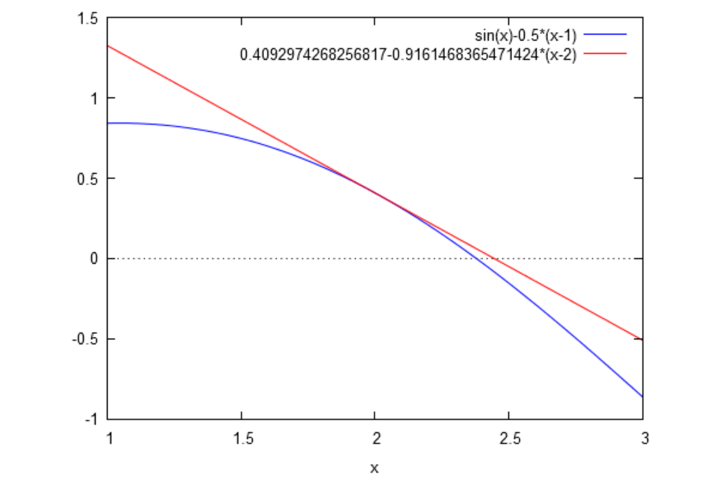
$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie: $r \approx 2.380061273139339$

Pierwsze przybliżenie $x_0 = 2$

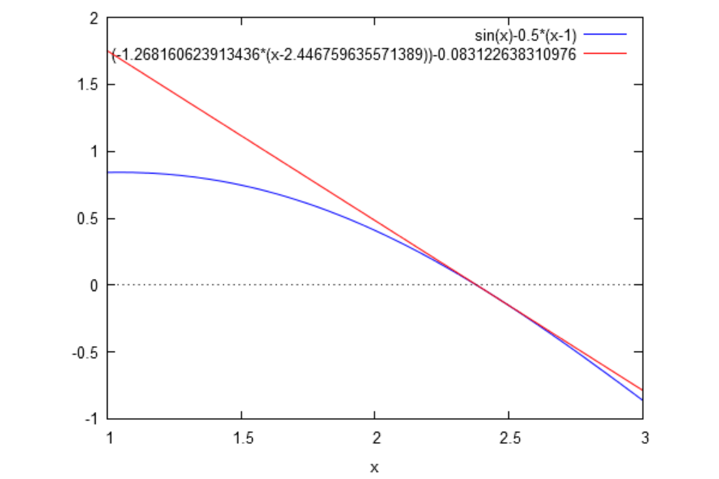
Przybliżenie (1)

$x_1 = 2.446759635571389$



Przybliżenie (2)

$x_2 = 2.381213807429787$



Kolejne przybliżenia

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.000000000000000 \\
x_1 &= 2.446759635571389 \\
x_2 &= 2.381213807429787 \\
x_3 &= 2.380061647086649 \\
x_4 &= 2.380061273139379
\end{aligned}
$$

Kolejne przybliżenia

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.000000000000000 \\
x_1 &= 2.446759635571389 \\
x_2 &= 2.381213807429787 \\
x_3 &= 2.380061647086649 \\
x_4 &= 2.380061273139379
\end{aligned}
$$

Według programu *Maxima*:

$$r \approx 2.380061273139339$$

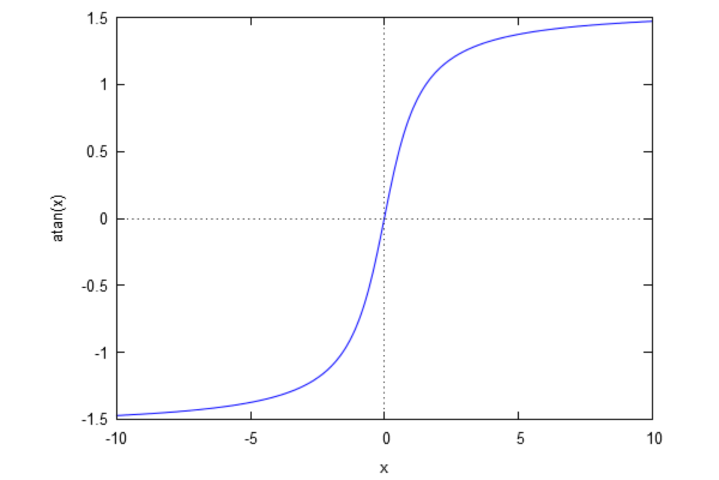
Kolejne przybliżenia – porównanie

x_n	przybliżenia	
x_0	1.500000000000000	2.000000000000000
x_1	3.241345836415600	2.446759635571390
x_2	2.425133621883010	2.381213807429790
x_3	2.380602252702230	2.380061647086650
x_4	2.380061355591100	2.380061273139380
x_5	2.380061273139340	2.380061273139340

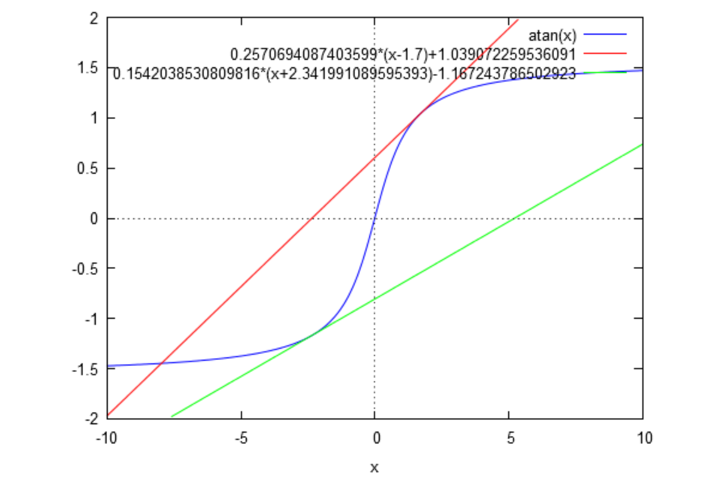
x_n	przybliżenia	
x_0	2.500000000000000	3.000000000000000
x_1	2.383542558956990	2.423567572387280
x_2	2.380064674904990	2.380566315343440
x_3	2.380061273142600	2.380061345003650
x_4	2.380061273139340	2.380061273139340
x_5	2.380061273139340	2.380061273139340

Przykład 2

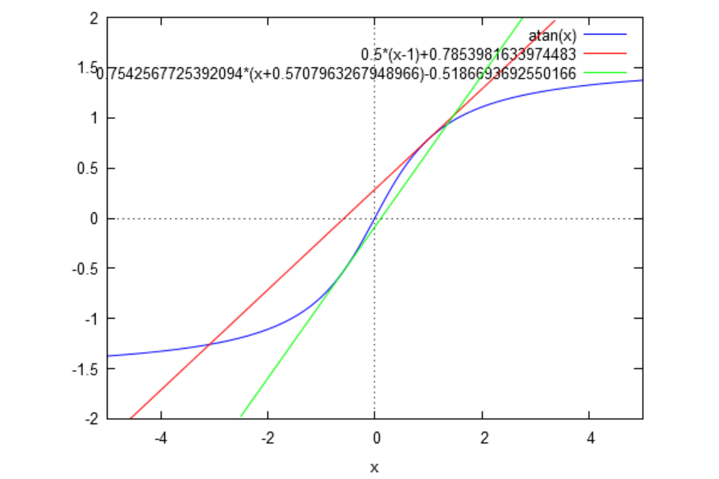
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x.$$



$x_0 = 1.7$


atan(x)
0.2570694087403599*(x-1.7)+1.039072259536091
0.1542038530809816*(x+2.341991089595393)-1.167243786502923
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-10
-5
0
5
10
x

$x_0 = 1.0$


atan(x)
0.5*(x-1)+0.785398163397448
0.7542567725392094*(x+0.5707963267948966)-0.5186693692550166
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-2
0
2
4
x

Przybliżenia przez kolejne x_i

x_0	1.7000	1.0000
x_1	−2.342	−0.5708
x_2	5.227	0.1169
x_3	−33.91	−0.0011
x_4	1772.0	0.0000

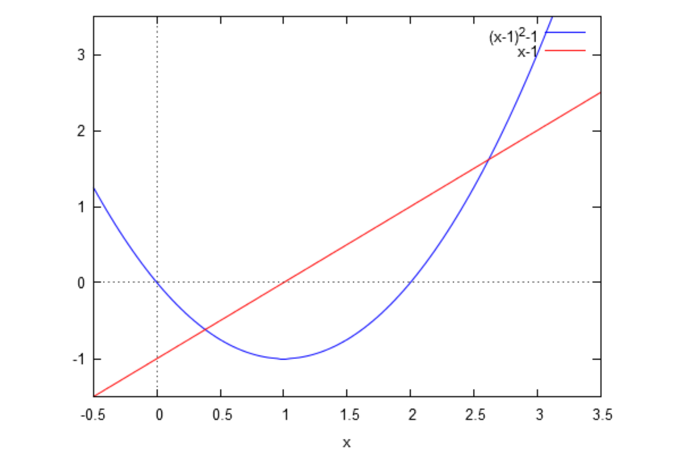
Przybliżenia przez kolejne x_i

x_0	1.7000	1.0000
x_1	-2.342	-0.5708
x_2	5.227	0.1169
x_3	-33.91	-0.0011
x_4	1772.0	0.0000

Dokładniej: dla $x_0 = 1.0$ jest $x_4 = 7.963096044106416 \cdot 10^{-10}$.

Metoda siecznych – przykład

Inna nazwa: *regula falsi* – fałszywe założenie o liniowości funkcji.



Metoda siecznych – wzory

Pochodną zastępujemy przez iloraz różnicowy. Iloraz różnicowy:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Wtedy

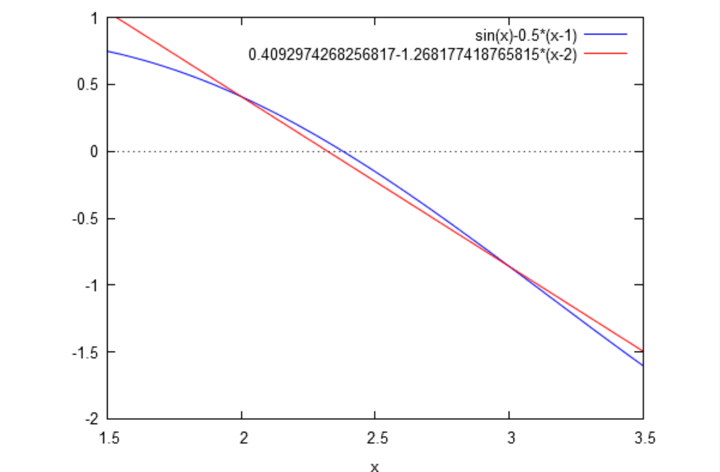
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Potrzebne są dwa punkty początkowe.

Przykład

$$f(x) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0$$

gdzie $x_0 = 2$, $x_1 = 3$.



Kolejne przybliżenia

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.000000000000000\\
x_1 &= 3.000000000000000\\
x_2 &= 2.322744610311709\\
x_3 &= 2.373098715169033\\
x_4 &= 2.380178440429179\\
x_5 &= 2.380061042152282
\end{aligned}
$$

Kolejne przybliżenia

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.000000000000000 \\
x_1 &= 3.000000000000000 \\
x_2 &= 2.322744610311709 \\
x_3 &= 2.373098715169033 \\
x_4 &= 2.380178440429179 \\
x_5 &= 2.380061042152282
\end{aligned}
$$

Według programu *Maxima*:

$$r \approx 2.380061273139339$$