Metody Numeryczne

Wykład 2

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Wojciech Kordecki

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} & \cdots\cdots & & & \\ & \cdots\cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,k-1} & a_{ik} \\ & \cdots\cdots & & & \\ & \cdots\cdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \cdots\cdots & \\ \cdots & b_{k-1,j} & \cdots \\ \cdots & b_{kj} & \cdots \end{bmatrix} =$$

Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} & \cdots\cdots & & & \\ & \cdots\cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,k-1} & a_{ik} \\ & \cdots\cdots & & & \\ & \cdots\cdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \cdots\cdots & \\ \cdots & b_{k-1,j} & \cdots \\ \cdots & b_{kj} & \cdots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} & \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{bmatrix}$$

Nieprzemienność mnożenia macierzy

Dodawanie macierzy jest przemienne, natomiast mnożenie nie jest przemienne, nawet dla macierzy kwadratowych, to znaczy że równość $AB = BA$ nie musi zachodzić.

Nieprzemienność mnożenia macierzy

Dodawanie macierzy jest przemienne, natomiast mnożenie nie jest przemienne, nawet dla macierzy kwadratowych, to znaczy że równość $AB = BA$ nie musi zachodzić.

Przykład.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpozycja macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Macierz A^T nazywa się macierzą transponowaną. Jej wiersze są kolumnami, a kolumny wierszami macierzy A.

Transpozycja macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Macierz A^T nazywa się macierzą transponowaną. Jej wiersze są kolumnami, a kolumny wierszami macierzy A.

Przykład.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz jednostkowa

Macierzą jednostkową I jest macierz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

czyli macierz kwadratowa taka, że na głównej przekątnej znajdują się jedynki, a poza nią – zera.

Macierz jednostkowa

Macierzą jednostkową I jest macierz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

czyli macierz kwadratowa taka, że na głównej przekątnej znajdują się jedynki, a poza nią – zera.
Łatwo zauważyć, że $IA = AI = A$. Macierz jednostkowa pełni przy mnożeniu macierzy rolę analogiczną do jedynki przy mnożeniu liczb.

Macierz odwrotna

Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy kwadratowej A jest macierzą kwadratową spełniającą równanie $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Przykład. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna

Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy kwadratowej A jest macierzą kwadratową spełniającą równanie $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Przykład. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić przez mnożenie, że

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Definicja wyznacznika

Niech A będzie macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$, a A_{ij} niech będzie podmacierzą powstałą z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Definicja wyznacznika

Niech A będzie macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$, a A_{ij} niech będzie podmacierzą powstałą z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy A oznaczamy przez $\det A$ i określamy rekurencyjnie:

Definicja wyznacznika

Niech A będzie macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$, a A_{ij} niech będzie podmacierzą powstałą z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy A oznaczamy przez $\det A$ i określamy rekurencyjnie:

1^o $\det[a_{11}] = a_{11}$ dla $n = 1$,

Definicja wyznacznika

Niech A będzie macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$, a A_{ij} niech będzie podmacierzą powstałą z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.
Wyznacznik macierzy A oznaczamy przez $\det A$ i określamy rekurencyjnie:
1^o $\det[a_{11}] = a_{11}$ dla $n = 1$,
2^o

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

dla $n > 1$.

Definicja wyznacznika

Niech A będzie macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$, a A_{ij} niech będzie podmacierzą powstałą z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy A oznaczamy przez $\det A$ i określamy rekurencyjnie:

1^o $\det[a_{11}] = a_{11}$ dla $n = 1$,

2^o

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

dla $n > 1$.

Powyższa definicja, jedna z wielu równoważnych, nazywa się definicją Laplace'a. Polega ona na rozwijaniu wyznacznika według i-tego wiersza (pierwsza suma) lub j-tej kolumny (druga suma). Jest więc też metodą obliczania wyznacznika.

Oznaczenia

Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

to wyznacznik oznaczamy również jako

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik stopnia 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

Wyznacznik stopnia 3 – reguła Sarrusa

Pod wyznacznikiem dopisujemy ponownie pierwszy i drugi wiersz, a następnie bierzemy sumę iloczynów po trzy elementy, (ze znakami $+$ lub $-$) tak, jak wskazują strzałki.

$$
\begin{array}{ccc}
+ \searrow & & \swarrow - \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}
\end{array}
$$

Wyznacznik stopnia 3 – reguła Sarrusa

Pod wyznacznikiem dopisujemy ponownie pierwszy i drugi wiersz, a następnie bierzemy sumę iloczynów po trzy elementy, (ze znakami $+$ lub $-$) tak, jak wskazują strzałki.

$$
\begin{array}{ccc}
+ \searrow & & \swarrow - \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|ccc|}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23}
\end{array}
$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

Wyznacznik stopnia 3 – reguła Sarrusa

Pod wyznacznikiem dopisujemy ponownie pierwszy i drugi wiersz, a następnie bierzemy sumę iloczynów po trzy elementy, (ze znakami $+$ lub $-$) tak, jak wskazują strzałki.

$$
\begin{array}{ccc}
+\searrow & & \swarrow - \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \\
\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}
\end{array}
$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}\,.$$

Mnożenie wiersza lub kolumny przez stałą

Obliczanie wyznaczników ułatwiają następujące własności.

$$\det A = \det A^T ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & ka_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & ka_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & ka_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Własność ta jest prawdziwa również wtedy, gdy przez stałą k mnożymy wiersze macierzy.

Wiersz zerowy, kolumna zerowa

Twierdzenie

Jeżeli w macierzy A istnieje wiersz lub kolumna składająca się z samych zer, to $\det A = 0$.

Wiersz zerowy, kolumna zerowa

Twierdzenie

Jeżeli w macierzy A istnieje wiersz lub kolumna składająca się z samych zer, to $\det A = 0$.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dodanie kolumny lub wiersza

Twierdzenie

Jeżeli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez dodanie do pewnego wiersza lub kolumny innego wiersza lub kolumny pomnożonego przez liczbę, to $\det A' = \det A$.

Dodanie kolumny lub wiersza

Twierdzenie

Jeżeli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez dodanie do pewnego wiersza lub kolumny innego wiersza lub kolumny pomnożonego przez liczbę, to $\det A' = \det A$.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

Dodanie kolumny lub wiersza

Twierdzenie

Jeżeli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez dodanie do pewnego wiersza lub kolumny innego wiersza lub kolumny pomnożonego przez liczbę, to $\det A' = \det A$.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2+(-2)\cdot 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4+(-2)\cdot 2 & 9 \\ 1 & 0 & 2+(-2)\cdot 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8+(-2)\cdot 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

Dodanie kolumny lub wiersza

Twierdzenie

Jeżeli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez dodanie do pewnego wiersza lub kolumny innego wiersza lub kolumny pomnożonego przez liczbę, to $\det A' = \det A$.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2+(-2)\cdot 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4+(-2)\cdot 2 & 9 \\ 1 & 0 & 2+(-2)\cdot 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8+(-2)\cdot 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dalsze własności wyznacznika

Wniosek

Jeżeli pewien wiersz w macierzy A jest sumą innych wierszy pomnożonych przez liczby, to $\det A = 0$.

Dalsze własności wyznacznika

Wniosek

Jeżeli pewien wiersz w macierzy A jest sumą innych wierszy pomnożonych przez liczby, to $\det A = 0$.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0\,,$$

bo wiersz trzeci powstał z dodania do wiersza pierwszego, wiersza drugiego pomnożonego przez 2.

Dalsze własności wyznacznika

Wniosek

Jeżeli pewien wiersz w macierzy A jest sumą innych wierszy pomnożonych przez liczby, to $\det A = 0$.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0\,,$$

bo wiersz trzeci powstał z dodania do wiersza pierwszego, wiersza drugiego pomnożonego przez 2.

Twierdzenie

Przy zamianie dwóch wierszy lub kolumn, zmienia się znak wyznacznika.

Macierz trójkątna

Macierz trójkątna to macierz, w której nad lub pod główną przekątną występują same zera.

- Jeśli zera są nad główna przekątną, to macierz trójkątna dolna: L.
- Jeśli zera są pod główna przekątną, to macierz trójkątna górna: U.

Macierz trójkątna

Macierz trójkątna to macierz, w której nad lub pod główną przekątną występują same zera.

- Jeśli zera są nad główna przekątną, to macierz trójkątna dolna: L.
- Jeśli zera są pod główna przekątną, to macierz trójkątna górna: U.

Twierdzenie

Jeżeli A jest macierzą trójkątną, to

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \,,$$

czyli wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów z głównej przekątnej.

Macierz przekątniowa

Macierz przekątniowa to macierz, w której zarówno nad, jak i pod główną przekątną występują same zera.

Macierz przekątniowa

Macierz przekątniowa to macierz, w której zarówno nad, jak i pod główną przekątną występują same zera.

Twierdzenie

Jeżeli A jest macierzą przekątniową, to

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\,,$$

czyli wyznacznik macierzy przekątniowej jest iloczynem elementów z głównej przekątnej.

Wyznacznik iloczynu macierzy

Twierdzenie

Jeśli macierze kwadratowe A i B są tego samego wymiaru, to

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Wyznacznik iloczynu macierzy

Twierdzenie

Jeśli macierze kwadratowe A i B są tego samego wymiaru, to

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Wniosek

Jeśli macierze trójkątne A i B są tego samego wymiaru n, to

$$\det(AB) = (a_{11}a_{22}\ldots a_{nn})(b_{11}b_{22}\ldots b_{nn}).$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = -1, \quad \det B = 2.$$

$$\det AB = \det BA = -2.$$

Rozkład LU

Niech L będzie macierzą trójkątną dolną, a U – macierzą trójkątną górną.

Rozkład LU

Niech L będzie macierzą trójkątną dolną, a U – macierzą trójkątną górną.

Jeśli

$$A = LU,$$

to A ma rozkład LU.

Rozkład LU

Niech L będzie macierzą trójkątną dolną, a U – macierzą trójkątną górną.

Jeśli

$$A = LU,$$

to A ma rozkład LU.

Twierdzenie

Jeśli macierz A ma rozkład LU, to

$$\det A = (l_{11} l_{22} \cdots l_{nn})(u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}).$$

Rozkład LU

Niech L będzie macierzą trójkątną dolną, a U – macierzą trójkątną górną.

Jeśli
$$A = LU,$$
to A ma rozkład LU.

Twierdzenie

Jeśli macierz A ma rozkład LU, to
$$\det A = (l_{11} l_{22} \cdots l_{nn})(u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}).$$

Problem. Kiedy dla danej macierzy A istnieje rozkład LU?

Rozkład LU c.d.

Oznaczenia:

1. $A = [a_{ij}]$ – macierz kwadratowa $n \times n$,
2. A_k – podmacierz macierzy A utworzona z k pierwszych wierszy i k pierwszych kolumn macierzy A, $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

Rozkład LU c.d.

Oznaczenia:

1. $A = [a_{ij}]$ – macierz kwadratowa $n \times n$,
2. A_k – podmacierz macierzy A utworzona z k pierwszych wierszy i k pierwszych kolumn macierzy A, $k = 1, 2, \dots, n-1$,

Twierdzenie

Jeśli $\det A_k \neq 0$ *dla* $k = 1, 2, \dots, n-1$, *to istnieje jedyny rozkład* $A = LU$ *taki, że* $L = [l_{ij}]$ *jest macierzą trójkątna dolną taką, że* $l_{ii} = 1$ *dla* $i = 1, 2, \dots, n$ *oraz* $U = [u_{ij}]$ *jest macierzą trójkątna górną.*

Algorytm Doolittle'a

$$u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & \text{dla } i \leq j. \\ 0 & \text{dla } i > j, \end{cases}$$

$$l_{ji} = \begin{cases} \dfrac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}\right)}{u_{ii}} & \text{dla } i < j, \\ 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i > j \end{cases}$$

Algorytm Doolittle'a

$$u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & \text{dla } i \leq j. \\ 0 & \text{dla } i > j, \end{cases}$$

$$l_{ji} = \begin{cases} \dfrac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}\right)}{u_{ii}} & \text{dla } i < j, \\ 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i > j \end{cases}$$

Można równocześnie obliczać k-ty wiersz U i k-tą kolumnę L.

Algorytm Doolittle'a – szkic uzasadnienia

$$
\begin{aligned}
LU &= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cline{2-4} l_{21} & & & \\ l_{31} & & & \\ \dots & & & \\ l_{n1} & & & \end{array}\right]
\left[\begin{array}{c|ccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ \cline{2-4} 0 & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cline{2-4} a_{21} & & & \\ a_{31} & & & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & & & \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Rozkład LU – wzory

$$a_{ij}^{(k+1)} := \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & \text{dla } i \leq k, \\ a_{ij}^{(k)} - \left(a_{ik}^{(k)} / a^{(k)} \right) a_{kj}^{(k)} & \text{dla } i \geq k+1,\ j \geq k+1, \\ 0 & \text{dla } i \geq k+1,\ j \leq k. \end{cases}$$

$U = A^{(n)}$.

$$l_{ik} = \begin{cases} a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} & \text{dla } i \geq k+1, \\ 1 & \text{dla } i = k, \\ 0 & \text{dla } i \leq k-1. \end{cases}$$

Rozkład LU – wzory

$$a_{ij}^{(k+1)} := \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & \text{dla } i \leq k, \\ a_{ij}^{(k)} - \left(a_{ik}^{(k)} / a^{(k)} \right) a_{kj}^{(k)} & \text{dla } i \geq k+1,\ j \geq k+1, \\ 0 & \text{dla } i \geq k+1,\ j \leq k. \end{cases}$$

$U = A^{(n)}$.

$$l_{ik} = \begin{cases} a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} & \text{dla } i \geq k+1, \\ 1 & \text{dla } i = k, \\ 0 & \text{dla } i \leq k-1. \end{cases}$$

Twierdzenie

Jeżeli wszystkie elementy główne $a_{kk}^{(k)} \neq 0$*, to* $A = LU$*.*

Przykład (1)

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 9 \\ 0 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

Spełnione są założenia twierdzenia: $\det A = 100$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Przykład (2)

Po wymnożeniu macierzy L i U oraz przyrównaniu iloczynu do A otrzymujemy kolejno:

$$
\begin{aligned}
&u_{11} = 20,\ \ u_{12} = 10,\ \ u_{13} = 10,\\
&l_{21}u_{11} = 10 \to l_{21} = \frac{1}{2},\\
&l_{31}u_{11} = 0 \to l_{31} = 0,\\
&l_{21}u_{12} + u_{22} = 10 \to u_{22} = 5,\\
&l_{21}u_{13} + u_{23} = 9 \to u_{23} = 4,\\
&l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 10 \to l_{32} = 2,\\
&l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 9 \to u_{33} = 1.
\end{aligned}
$$

Przykład (3)

Ostatecznie mamy

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład (3)

Ostatecznie mamy

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 9 \\ 0 & 10 & 9 \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$
$$= (1 \cdot 1 \cdot 1)\,(20 \cdot 5 \cdot 1) = 100.$$

Rozkład Cholesky'ego

Macierz A jest dodatnio określona, jeśli $\det A_k > 0$ dla każdego k.

Rozkład Cholesky'ego

Macierz A jest dodatnio określona, jeśli $\det A_k > 0$ dla każdego k.

Twierdzenie

Jeśli macierz A jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona, to ma jedyny rozkład postaci $A = LL^T$, gdzie L jest macierzą trójkątna dolną o elementach dodatnich na głównej przekątnej.

Rozkład Cholesky'ego – wzory

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$l_{ss} = \sqrt{a_{ss} - \sum_{k=1}^{s-1} l_{sk}^2} \text{ dla } s = 1, 2, \dots, n,$$

$$l_{is} = \frac{a_{is} - \sum_{k=1}^{s-1} l_{ik} l_{sk}}{u_{ii}} \text{ dla } i = s+1, \dots, n.$$

Zapis macierzowy układu równań liniowych (1)

Za pomocą macierzy można w zwarty sposób zapisywać układy równań liniowych, tzn. takich równań, w których wszystkie niewiadome występują w pierwszej potędze. Układ takich równań ma następującą postać:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Zapis macierzowy układu równań liniowych (2)

Układ ten można zapisać w postaci

$$AX = B\,,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Zapis macierzowy układu równań liniowych (2)

Układ ten można zapisać w postaci

$$AX = B\,,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Jeśli A jest macierzą kwadratową, to tego rozwiązanie układu (jeśli istnieje) można przedstawić w postaci $X = A^{-1}B$.

Najprostszy przykład

Jeśli A jest macierzą przekątniową,

$$AX = B,$$

to

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= b_1 \\ a_{22}x_1 &= b_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Prawie najprostszy przykład

Jeśli A jest macierzą trójkątną dolną,

$$AX = B,$$

to

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & = & b_2 \\ & & \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Można wtedy kolejno obliczać rozwiązania x_i dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Wzory Cramera

Układ n równań o n niewiadomych:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Wzory Cramera

Układ n równań o n niewiadomych:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

czyli

$$AX = B.$$

Wzory Cramera

Układ n równań o n niewiadomych:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

czyli

$$AX = B.$$

Twierdzenie

Jeżeli $\det(A) \neq 0$, *to*

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

gdzie A_i oznacza macierz powstałą z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B wyrazów wolnych.

Przykład

Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x\ +y\ +z &= 2 \\ -x-2y+3z &= 2 \\ 2x-3y-z &= 1 \end{aligned}$$

Przykład

Rozwiązać układ równań

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 2 \\ -x & -2y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & -z & = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} + \searrow & & \swarrow - \\ \det A = & \begin{array}{|rrr|} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{array} & = \\ & \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{array} & \end{array}$$

Przykład

Rozwiązać układ równań

$$
\begin{aligned}
x \;\; + y \;\; + z \;\; &= 2\\
-x - 2y + 3z &= 2\\
2x - 3y \;\; - z \;\; &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\det A = \begin{array}{c}
+\searrow \qquad\qquad\qquad \swarrow - \\
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\
\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{matrix}
\end{array} =
$$

$$
2 + 3 + 6 - (-4 - 9 + 1) = 11 + 12 = 23.
$$

Wyznacznik A_1

Zastępujemy pierwszą kolumnę kolumną wyrazów wolnych.

$$
\begin{array}{cc}
 & + \searrow \qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow - \\
\det A_1 = & \begin{array}{rrr} \multicolumn{3}{c}{\left|\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{array}\right|} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{array} \quad =
\end{array}
$$

Wyznacznik A_1

Zastępujemy pierwszą kolumnę kolumną wyrazów wolnych.

$$\det A_1 = \begin{array}{c} + \searrow \qquad\qquad \swarrow - \\ \begin{array}{|rrr|} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{array} \end{array} =$$

$$4 - 6 + 3 - (-2 - 18 - 2) = 1 + 22 = 23.$$

Wyznacznik A_2

Zastępujemy drugą kolumnę kolumną wyrazów wolnych.

$$
\begin{array}{ccc}
+ \searrow & & \swarrow - \\
\det A_2 = & \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{array} \end{array} & =
\end{array}
$$

Wyznacznik A_2

Zastępujemy drugą kolumnę kolumną wyrazów wolnych.

$$\det A_2 = \begin{array}{|rrr|} \multicolumn{1}{l}{+\searrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{r}{\swarrow -} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ \multicolumn{1}{r}{1} & \multicolumn{1}{r}{2} & \multicolumn{1}{r}{1} \\ \multicolumn{1}{r}{-1} & \multicolumn{1}{r}{2} & \multicolumn{1}{r}{3} \end{array} =$$

$$-2 - 1 + 12 - (4 + 3 + 2) = 9 - 9 = 0.$$

Wyznacznik A_3

Zastępujemy trzecią kolumnę kolumną wyrazów wolnych.

$$
\det A_3 = \quad
\begin{array}{c}
+ \qquad\qquad\qquad - \\
\begin{array}{|rrr|}
1 & 1 & 2 \\
-1 & -2 & 2 \\
2 & -3 & 1
\end{array} \\
\begin{array}{rrr}
1 & 1 & 2 \\
-1 & -2 & 2
\end{array}
\end{array}
\quad =
$$

Wyznacznik A_3

Zastępujemy trzecią kolumnę kolumną wyrazów wolnych.

$$\det A_3 = \begin{array}{c} + \searrow \qquad\qquad \swarrow - \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{matrix} \end{array} =$$

$$-2 + 6 + 4 - (-8 - 6 - 1) = 8 + 15 = 23.$$

Przykład c.d.

Wyznaczniki: $\det(A) = 23$, $\det(A_1) = 23$, $\det(A_2) = 0$, $\det(A_3) = 23$.

Przykład c.d.

Wyznaczniki: $\det(A) = 23$, $\det(A_1) = 23$, $\det(A_2) = 0$, $\det(A_3) = 23$.
Ponieważ $\det(A) \neq 0$, to stosujemy wzory Cramera, otrzymując rozwiązania:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1\,,$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 0\,,$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1\,.$$

Układ równań

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

czyli

$$AX = B,$$

gdzie $\det A \neq 0$.

Układ równań

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

czyli

$$AX = B,$$

gdzie $\det A \neq 0$.

Oznaczymy $A^{(1)} = A$, $B^{(1)} = B$.

Algorytm

Zaczynamy od $k = 1$, czyli od pierwszego wiersza

Algorytm

Zaczynamy od $k = 1$, czyli od pierwszego wiersza
Odejmujemy dla układu

$$A^{(1)}X = B^{(1)}$$

dla kolejnych $i = k+1, \ldots, n$ wiersza k-tego, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, pomnożonego przez $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$. Otrzymujemy nowy układ równań z macierzami $A^{(k+1)}$ i $B^{(k+1)}$.

Algorytm

Zaczynamy od $k = 1$, czyli od pierwszego wiersza
Odejmujemy dla układu

$$A^{(1)}X = B^{(1)}$$

dla kolejnych $i = k+1, \ldots, n$ wiersza k-tego, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, pomnożonego przez $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$. Otrzymujemy nowy układ równań z macierzami $A^{(k+1)}$ i $B^{(k+1)}$.
Krok ten powtarzamy $n-1$ razy otrzymując macierz trójkątną $A^{(n)}$.

Układ równań – przykład

Przykład z książki D. Kincaid, W. Cheney. *Analiza numeryczna*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006, str. 157.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Krok 1

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Krok 1

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$w_2 := w_2 - 2w_1,$

Krok 1

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$w_2 := w_2 - 2w_1,\ w_3 := w_3 - (1/2)\, w_1,$

Krok 1

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$$w_2 := w_2 - 2w_1,\; w_3 := w_3 - (1/2)\, w_1,\; w_4 := w_4 - (-1)\, w_1.$$

Krok 1

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$$w_2 := w_2 - 2w_1,\ w_3 := w_3 - (1/2)\, w_1,\ w_4 := w_4 - (-1)\, w_1.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

Krok 1

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$w_2 := w_2 - 2w_1,\ w_3 := w_3 - (1/2)\, w_1,\ w_4 := w_4 - (-1)\, w_1.$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$2, 1/2, -1$ – mnożniki dla pierwszego kroku eliminacji,
6 – element główny.

Krok 2

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

Krok 2

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$w_3 := w_3 - 3w_2,$

Krok 2

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$w_3 := w_3 - 3w_2,\ w_4 := w_4 - (-1/2)\, w_2.$

Krok 2

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$w_3 := w_3 - 3w_2,\ w_4 := w_4 - (-1/2)\, w_2.$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Krok 2

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$w_3 := w_3 - 3w_2,\ w_4 := w_4 - (-1/2)\, w_2.$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$3, -1/2$ – mnożniki,
-4 – element główny.

Krok 3

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Krok 3

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$w_4 := w_4 - 2w_3$.

Krok 3

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$w_4 := w_4 - 2w_3.$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Krok 3

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$w_4 := w_4 - 2w_3.$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2 – mnożnik i element główny.

Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Obliczając od x_4 do x_1:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

k-ty krok

$$A^{(1)} := A \to A^{(2)} \to \cdots \to A^{(n)};$$

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|ccccc}
a_{11}^{(k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(k)} & a_{1k}^{(k)} & \dots & a_{1j}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & a_{k-1,k-1}^{(k)} & a_{k-1,k}^{(k)} & \dots & a_{k-1,j}^{(k)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k)} \\
\hline
0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\
\hline
0 & \dots & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & \dots & a_{k+1,j}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{ik}^{(k)} & \dots & a_{ij}^{(k)} & \dots & a_{in}^{(k)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nj}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)}
\end{array}\right]$$

Błędy numeryczne

Metoda eliminacji Gaussa w przedstawionej postaci daje rozwiązania z małym błędem, o ile tylko wartości elementów w macierzy $A^{(n)}$ na głównej przekątnej nie są bliskie zeru w porównaniu z innymi elementami.
W przeciwny przypadku może powstać znaczny błąd numeryczny.

Istnienie zera na przekątnej wyklucza rozwiązanie układu.