

Rozkład LU

Oznaczamy $A = A^{(1)}$ i następnie konstruujemy ciąg macierzy $A^{(k+1)}$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$ według następującej procedury:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & \text{dla } i \leq k, \\ a_{ij}^{(k)} - (a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}) a_{kj}^{(k)} & \text{dla } i \geq k+1, j \geq k+1, \\ 0 & \text{dla } i \geq k+1, j \leq k. \end{cases} \quad (1)$$

Wyrażenia $(a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)})$ nazywamy mnożnikami, zaś $a_{kk}^{(k)}$ – elementem głównym dla danego kroku metody Gaussa. Realizacja procedury (1) polega na wykonaniu operacji elementarnych na wierszach (patrz [?], str. 182) macierzy $A^{(k)}$ tak, aby pod elementem głównym otrzymać wyrazy zerowe. Na k -tym kroku od wierszy o numerach $i \geq k+1$ odejmujemy k -ty wiersz pomnożony przez odpowiednie mnożniki.

Macierz $A^{(k+1)}$ będzie postaci

$$A^{(k+1)} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} a_{11}^{(k+1)} & \dots & a_{1k}^{(k+1)} & a_{1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{1j}^{(k+1)} & \dots & a_{1n}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{kk}^{(k+1)} & a_{k,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{kj}^{(k+1)} & \dots & a_{kn}^{(k+1)} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1,j}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{k+2,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+2,j}^{(k+1)} & \dots & a_{k+2,n}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{ij}^{(k+1)} & \dots & a_{in}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{nj}^{(k+1)} & \dots & a_{nn}^{(k+1)} \end{array} \right].$$

Szukane macierze L i U otrzymujemy jako: $U = A^{(n)}$, $L = [l_{ik}]$, gdzie

$$l_{ik} = \begin{cases} a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} & \text{dla } i \geq k+1, \\ 1 & \text{dla } i = k, \\ 0 & \text{dla } i \leq k-1. \end{cases}$$