Matematyka Dyskretna

Wykład 12

Funkcje tworzące

Wojciech Kordecki
wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Literatura

R. Rębowski, *Matematyka dyskretna dla informatyków* PWSZ 2008, rozdz. 4.5, str. 158–172.

W. Kordecki, A. Łyczkowska-Hanćkowiak, *Matematyka dyskretna dla informatyków*, Helion 2018, rozdz. 5.

H. Lewis, R. Zax, *Matematyka dyskretna*, PWN 2021, rozdz. 24.

Ciągi definiowane rekurencyjnie

Przykład.
Ciąg arytmetyczny:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
a_k &= a_{k-1} + r\,,
\end{aligned}
$$

dla $k = 1, 2, \ldots$.

Ciąg geometryczny:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
a_k &= a_{k-1} q,
\end{aligned}
$$

dla $k = 1, 2, \ldots$.

Granica

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}+2},\ a_1 = \sqrt{2}.$$

Jeśli istnieje granica:

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_{n-1}+2} = \sqrt{g+2},$$

skąd

$$g^2 = g+2 \implies g^2 - g - 2 = 0.$$

Obliczamy:

$$\Delta = 1 + 4\cdot 2 = 9,$$

Pierwiastki:

$$g_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \qquad g_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Czy ta granica istnieje?

Granica – istnienie

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2}$$

Symbolicznie:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{2} \\
\left(\sqrt{2}+2\right)^{0.5} \\
\left(\left(\sqrt{2}+2\right)^{0.5}+2\right)^{0.5} \\
\left(\left(\left(\sqrt{2}+2\right)^{0.5}+2\right)^{0.5}+2\right)^{0.5}
\end{array}$$

Numerycznie:

$$1.414213562373095,\ 1.847759065022573,$$
$$1.961570560806461,\ 1.990369453344394.$$

Granica – istnienie

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2}$$

Symbolicznie:

$$\begin{gathered}\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}+2)^{0.5} \\ \left((\sqrt{2}+2)^{0.5}+2\right)^{0.5} \\ \left(\left((\sqrt{2}+2)^{0.5}+2\right)^{0.5}+2\right)^{0.5}\end{gathered}$$

Numerycznie:

$$1.414213562373095,\ 1.847759065022573,$$
$$1.961570560806461,\ 1.990369453344394.$$

Ciąg jest rosnący i ograniczony, więc ma granicę.

Szereg liczbowy

Szereg geometryczny, $a \neq 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} = \frac{a}{1-q} & \text{dla } |q| < 1, \\ \text{rozbieżny} & \text{dla } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Szereg liczbowy

Szereg geometryczny, $a \neq 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} = \frac{a}{1-q} & \text{dla } |q| < 1, \\ \text{rozbieżny} & \text{dla } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Suma skończona:

$$\sum_{k=0}^{n} aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Szereg potęgowy

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Szereg potęgowy

$$s\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Suma szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Szereg potęgowy

$$s\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Suma szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Dwumian Newtona:

$$(1+x)^m = \sum_{n=1}^{m} \binom{m}{k} x^n.$$

Szereg Taylora

n-ta pochodna:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n x}{dx^n}.$$

Rozwinięcie w szereg Taylora.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Szereg Taylora

n-ta pochodna:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n x}{dx^n}.$$

Rozwinięcie w szereg Taylora.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Rozwinięcie w szereg Maclaurina.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Szereg Maclaurina

Funkcja	Rozwinięcie
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \cdots$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

Szereg formalny

Ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

nie musi być zbieżny!

Wielomian

Szereg skończony

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Wielomian

Szereg skończony

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

albo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

gdy $a_k = 0$ dla $k > n$.

Wielomian

Szereg skończony

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

albo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

gdy $a_k = 0$ dla $k > n$.

Szereg skończony jest zawsze zbieżny – wielomian.

Funkcja tworząca (1)

Niech a_k będzie ciągiem liczbowym. *Funkcją tworzącą* (ang. *generating function*) nazywa się szereg formalny:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Przykład.

- Dla ciągu złożonego z samych jedynek, to znaczy o wyrazach $a_k = 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} .$$
- Dla ciągu współczynników dwumianowych, to znaczy o wyrazach $a_k = \binom{n}{k}$ dla ustalonego n,
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n .$$

Funkcja tworząca (2)

Przykład. c.d.

- Dla ciągu naprzemiennego o wyrazach $a_k = (-1)^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}.$$

- Dla ciągu o wyrazach $a_k = 2^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}.$$

Działania na szeregach (1)

Szeregi

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Dodawanie szeregów:

$$A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k .$$

Mnożenie szeregu przez liczbę:

$$\alpha A(x) = \alpha A(x) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k ,$$

Działania na szeregach (2)

Mnożenie szeregów:

$$A(x)\,B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,,$$

gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\,.$$

Działania na szeregach (2)

Mnożenie szeregów:

$$A(x)\,B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,,$$

gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\,.$$

Jest to splot $\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$ ciągów $\{a_k\}$ i $\{b_k\}$.

Szereg jednostkowy i odwrotny

Szereg jednostkowy $I(x)$ to szereg spełniający równanie:

$$A(x) \cdot I(x) = I(x) \cdot A(x) = A(x) \ .$$

Jest to szereg, w którym $a_0 = 1$ oraz $a_i = 0$ dla $i \neq 0$.

Szereg jednostkowy i odwrotny

Szereg jednostkowy $I(x)$ to szereg spełniający równanie:

$$A(x) \cdot I(x) = I(x) \cdot A(x) = A(x) \; .$$

Jest to szereg, w którym $a_0 = 1$ oraz $a_i = 0$ dla $i \neq 0$.

Szereg odwrotny $A^{-1}(x)$ to szereg, który spełnia warunek:

$$A(x) \cdot A^{-1}(x) = A^{-1}(x) \cdot A(x) = I(x) \; .$$

Oczywiście $I^{-1}(x) = I(x)$.

Szereg $I(x)$ jest elementem neutralnym dla mnożenia szeregów.

Problem

Dla dla danego ciągu $\{a_n\}$ spełniającego pewne równanie rekurencyjne:

$$a_n = f\left(a_n, \ldots, a_{n-k}\right)$$

dla całkowitych n oraz pewnego k, przy czym $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$, chcemy znaleźć jawny wzór na a_n jako funkcję zmiennej n.

Rozwiązanie

1. Pomnożyć obie strony równania przez x^n i zsumować po n:

$$\sum_n a_n x^n = \sum_n f\left(a_n, \ldots, a_{n-k}\right) x^n,$$

otrzymując równość postaci:

$$A(x) = h(A(x)).$$

2. Rozwiązać równanie ze względu na $A(x)$.
3. Rozwinąć $A(x)$ w szereg potęgowy. Współczynniki przy x^n są równe a_n.

Wieże Hanoi

Niech $f(n)$ oznacza liczbę ruchów koniecznych do przełożenia krążków.

Liczba ruchów Wzór rekurencyjny:

$$f_n = 2f_{n-1} + 1.$$

Funkcja tworząca $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2f_{n-1} + 1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2f_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2f_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 2xF(x) + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Wieże Hanoi c.d.

Równanie:

$$F(x) = 2xF(x) + \frac{x}{1-x}.$$

Rozwiązanie:

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)},$$

skąd – *Maxima*:

```
niceindices(powerseries(x/((1-x)*(1-2*x)), x, 0)):
```

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) x^n.$$

co daje $f_n = 2^n - 1$.

Definicja rekurencyjna

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Równanie na funkcje tworzącą:

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n + x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n + x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} + x \\ &= xF(x) + x^2 F(x) + x. \end{aligned}$$

Rozwiązanie na $F(x)$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Rozkład na ułamki proste:

$$F(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$

gdzie $A = -1/\sqrt{5}$, $B = 1/\sqrt{5}$, $a = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, $b = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$.
Po rozwinięciu w szereg potęgowy obu ułamków prostych:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$$

dla $k = 0, 1, 2 \ldots$

Splot Fibonacciego

Znajdziemy wzór na:

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k},$$

gdzie f_k jest k-tą liczbą Fibonacciego.
Ciąg $\{g_n\}$ jest splotem ciągu $\{f_n\}$ ze sobą.
Liczby Fibonacciego mają funkcję tworzącą:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Liczby g_n mają funkcję tworzącą:

$$G(x) = (F(x))^2 = \frac{x^2}{(1 - x - x^2)^2}.$$

Rozwinięcie $G(x)$

Rozwinięcie funkcji $G(x)$:

$$G(x) = (F(x))^2 = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\right)^2$$
$$= \frac{A^2}{(x-a)^2} + \frac{B^2}{(x-b)^2} + \frac{2AB}{(x-a)(x-b)}.$$

Rozwinięcie $G(x)$

Rozwinięcie funkcji $G(x)$:

$$G(x) = (F(x))^2 = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\right)^2$$
$$= \frac{A^2}{(x-a)^2} + \frac{B^2}{(x-b)^2} + \frac{2AB}{(x-a)(x-b)}.$$

Można wyliczyć:

$$G(x) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n x^n - \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^n + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b^n x^n.$$

skąd

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k} = \frac{2nf_{n+1} - (n+1)f_n}{5}.$$

Zrównoważony ciąg binarny

Zrównoważony ciąg binarny długości $2n$, to ciąg zawierający n zer oraz n jedynek o tej własności, że dla każdego k, $1 \leq k \leq 2n$ na początkowych k pozycjach liczba zer jest nie mniejsza niż liczba jedynek.

Zrównoważony ciąg binarny

Zrównoważony ciąg binarny długości $2n$, to ciąg zawierający n zer oraz n jedynek o tej własności, że dla każdego k, $1 \leq k \leq 2n$ na początkowych k pozycjach liczba zer jest nie mniejsza niż liczba jedynek.

Przykład.

- Da $n = 1$ istnieje jeden ciąg zrównoważony długości 2. Jest nim (01).
- Dla $n = 2$ istnieją dwa ciągi zrównoważone długości 4. Są nimi ciągi (0011) i (0101).
- Dla $n = 3$ istnieje pięć ciągów zrównoważonych długości 6. Są nimi ciągi (000111), (001101), (010101), (010011) i (001011).

Liczby Catalana

Liczby c_n zrównoważonych ciągów binarnych długości $2n$ nazywają się liczbami Catalana. Zostały one wprowadzone w XVIII wieku przez L. Eulera, który badał liczbę podziałów wielokątów na trójkąty, ale nazwę zyskały na cześć E. Ch. Catalana, który rozważał je jako liczbę sposobów rozmieszczeń nawiasów.

Liczby Catalana

Liczby c_n zrównoważonych ciągów binarnych długości $2n$ nazywają się liczbami Catalana. Zostały one wprowadzone w XVIII wieku przez L. Eulera, który badał liczbę podziałów wielokątów na trójkąty, ale nazwę zyskały na cześć E. Ch. Catalana, który rozważał je jako liczbę sposobów rozmieszczeń nawiasów.

Liczba Catalana c_n jest więc liczbą możliwych rozmieszczeń nawiasów w iloczynie liczb $x_0 x_1 \ldots x_n$ dla $n \geq 0$ tak, aby kolejność operacji mnożenia dwóch liczb była wyznaczona jednoznacznie. Każdy nawias zamykający musi wystąpić po otwierającym. Stąd liczba nawiasów zamykających do podanej pozycji jest nie większa niż liczba nawiasów otwierających do tej pozycji.

Liczby Catalana

Liczby c_n zrównoważonych ciągów binarnych długości $2n$ nazywają się liczbami Catalana. Zostały one wprowadzone w XVIII wieku przez L. Eulera, który badał liczbę podziałów wielokątów na trójkąty, ale nazwę zyskały na cześć E. Ch. Catalana, który rozważał je jako liczbę sposobów rozmieszczeń nawiasów.

Liczba Catalana c_n jest więc liczbą możliwych rozmieszczeń nawiasów w iloczynie liczb $x_0 x_1 \dots x_n$ dla $n \geq 0$ tak, aby kolejność operacji mnożenia dwóch liczb była wyznaczona jednoznacznie. Każdy nawias zamykający musi wystąpić po otwierającym. Stąd liczba nawiasów zamykających do podanej pozycji jest nie większa niż liczba nawiasów otwierających do tej pozycji.

Tyle samo „ przedwiasów” co „zawiasów”.

Liczby Catalana c_2 i c_3

- $c_2 = 2$, ponieważ istnieją dwie możliwości rozmieszczenia nawiasów: $(x_0 x_1)\, x_2$, $x_0\,(x_1 x_2)$,
- $c_3 = 5$, ponieważ istnieje pięć możliwości rozmieszczenia nawiasów: $x_0\,((x_1 x_2)\, x_3)$, $x_0\,(x_1\,(x_2 x_3))$, $(x_0 x_1)\,(x_2 x_3)$, $((x_0 x_1)\, x_2)\, x_3$, $(x_0\,(x_1 x_2))\, x_3$.

Liczby Catalana c_k ogólnie

$$c_k = c_0 c_{k-1} + c_1 c_{k-2} + \cdots + c_{k-1} c_0.$$

Przyjmiemy $c_0 = 1$.
Funkcja tworząca:

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Prawa strona wzoru jest splotem ciągu $\{c_i\}$ z przesuniętym ciągiem $c_i' = c_{i-1}$, $c_0' = 0$, więc

$$C(x) = xC^2(x) + 1,$$

skąd

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0.$$

Rozwiązanie

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0.$$

Rozwiązując to równanie ze względu na $C(x)$, otrzymujemy dla $x \neq 0$:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{1}$$

Rozwijając $(1-4x)^{1/2}$ w szereg Maclaurina, dostajemy:

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^k.$$

Liczby c_k – wynik

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k.$$

Aby otrzymać rozwiązanie o dodatnich współczynnikach, należy wybrać znak minus. Stąd:

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k.$$

Ostatecznie:

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Wzór rekurencyjny

Ze wzoru

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

otrzymujemy

$$c_{n+1} = \frac{2\,(2n+1)}{n+2}c_n\,.$$

Interpretacje

Liczby Catalana mają wiele interpretacji kombinatorycznych.

Interpretacje

Liczby Catalana mają wiele interpretacji kombinatorycznych.

Liczba drzew binarnych o n wierzchołkach jest równa n-tej liczbie Catalana.

Interpretacje

Liczby Catalana mają wiele interpretacji kombinatorycznych.

Liczba drzew binarnych o n wierzchołkach jest równa n-tej liczbie Catalana.

Liczba dróg zaczynających się w początku układu współrzędnych i kończących się w $(0, 2n)$ położonych w pierwszej ćwiartce i złożonych z pojedynczych odcinków o początku (x, y) oraz końcu w punkcie $(x + 1, y + 1)$ lub $(x - 1, y - 1)$, $x, y \in \mathbb{N}$, jest n-tą liczbą Catalana.

Interpretacje

Liczby Catalana mają wiele interpretacji kombinatorycznych.

Liczba drzew binarnych o n wierzchołkach jest równa n-tej liczbie Catalana.

Liczba dróg zaczynających się w początku układu współrzędnych i kończących się w $(0, 2n)$ położonych w pierwszej ćwiartce i złożonych z pojedynczych odcinków o początku (x, y) oraz końcu w punkcie $(x + 1, y + 1)$ lub $(x - 1, y - 1)$, $x, y \in \mathbb{N}$, jest n-tą liczbą Catalana.

Podobnie liczba monotonicznych dróg w kwadracie $n \times n$.