Matematyka Dyskretna

Wykład 9

Płaskość i kolorowanie grafu

Wojciech Kordecki
wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Rysowanie na płaszczyźnie

Graf można narysować na płaszczyźnie:

- Wierzchołki reprezentujemy przez punkty (kółka) na płaszczyźnie.
- Krawędzie reprezentujemy przez odcinki lub krzywe łączące wierzchołki.
- Łuki reprezentujemy przez strzałki (odcinki lub krzywe zakończone grotem) od początku do końca łuku.

Płaskość i planarność

Graf płaski to graf, który **jest narysowany** na płaszczyźnie bez przecięć.

Płaskość i planarność

Graf płaski to graf, który **jest narysowany** na płaszczyźnie bez przecięć.

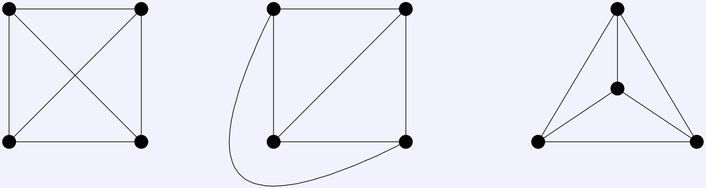
Graf planarny to graf, który **można narysować** na płaszczyźnie bez przecięć.

K_4 – graf planarny

K_4 narysowany jako niepłaski i jako płaski na dwa sposoby.

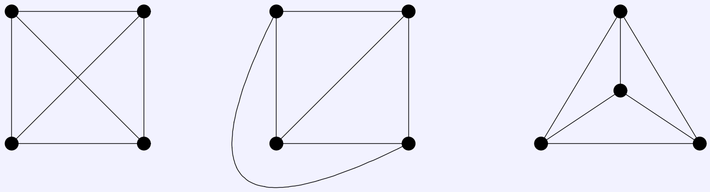
K_4 – graf planarny

K_4 narysowany jako niepłaski i jako płaski na dwa sposoby.



K_4 – graf planarny

K_4 narysowany jako niepłaski i jako płaski na dwa sposoby.



Wniosek: K_4 jest planarny.

Minory

Jeśli e jest krawędzią grafu G, to $G \setminus e$ oznacza graf otrzymany przez usunięcie krawędzi e.

Minory

Jeśli e jest krawędzią grafu G, to $G \setminus e$ oznacza graf otrzymany przez usunięcie krawędzi e.

Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G, to $G \setminus v$ oznacza graf otrzymany przez usunięcie wierzchołka v.

Minory

Jeśli e jest krawędzią grafu G, to $G \setminus e$ oznacza graf otrzymany przez usunięcie krawędzi e.

Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G, to $G \setminus v$ oznacza graf otrzymany przez usunięcie wierzchołka v.

G/e oznacza graf otrzymany przez ściągnięcie krawędzi e, czyli usunięcie jej końców v oraz w i zastąpienie ich przez nowy wierzchołek u incydentny z tymi krawędziami (różnymi od e), które były incydentne z v lub w.

Minory

Jeśli e jest krawędzią grafu G, to $G \setminus e$ oznacza graf otrzymany przez usunięcie krawędzi e.

Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G, to $G \setminus v$ oznacza graf otrzymany przez usunięcie wierzchołka v.

G/e oznacza graf otrzymany przez ściągnięcie krawędzi e, czyli usunięcie jej końców v oraz w i zastąpienie ich przez nowy wierzchołek u incydentny z tymi krawędziami (różnymi od e), które były incydentne z v lub w.

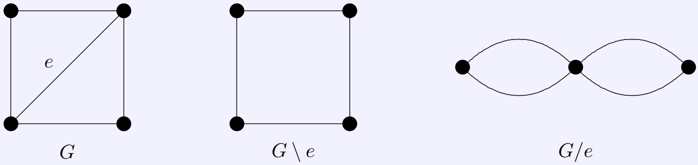
Minorem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf otrzymany przez kolejne operacje ściągnięcia i usunięcia krawędzi.

Minor – przykład

Graf G z usunięciem $G \setminus e$ i ściągnięciem G/e przez krawędź e.

Minor – przykład

Graf G z usunięciem $G \setminus e$ i ściągnięciem G/e przez krawędź e.

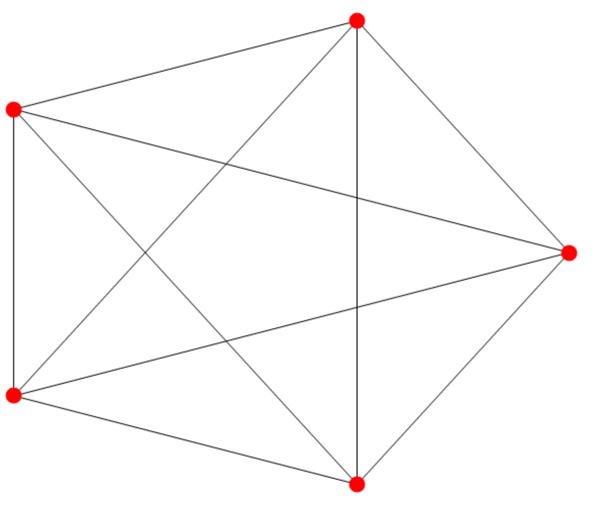


Grafy K_n i K_{mn}

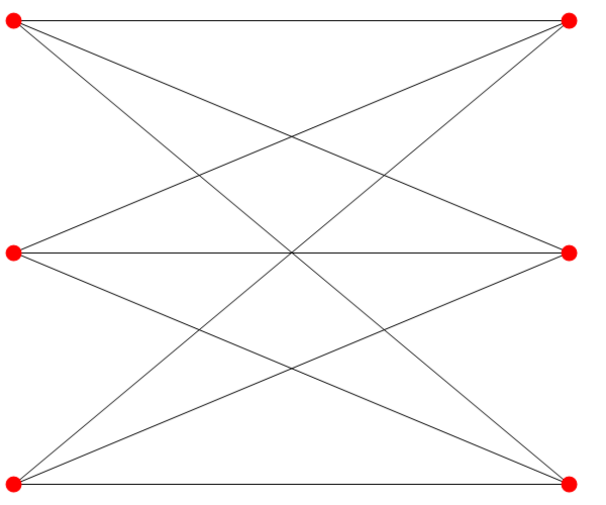
$K_n = (V, E)$: każde dwa wierzchołki należące do V, $|V| = n$, są połączone krawędzią $e \in E$.

$K_{mn} = (V_1 \cup V_2, E)$: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $|V_1| = m$, $|V_2| = n$,każde dwa wierzchołki – jeden z V_1, drugi z V_2 są połączone krawędzią, a żadne dwa wierzchołki z V_i nie są połączone.

K_5



K_{33}



Grafy *Maxima*

grafy1.wxmx 1 / 1

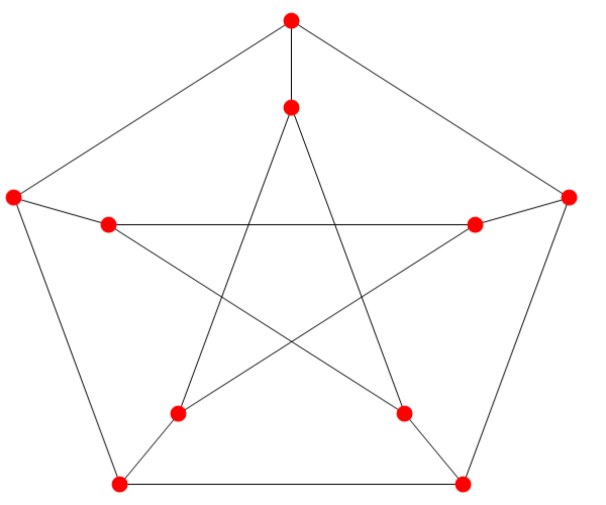
```
(%i1) load ("graphs")$

(%i2) K5:complete_graph (5) ;
(%o2) GRAPH(5 vertices, 10 edges)

(%i3) draw_graph(K5);
(%o3) done

(%i4) K33:complete_bipartite_graph (3,3) ;
(%o4) GRAPH(6 vertices, 9 edges)

(%i5) draw_graph(K33);
(%o5) done

(%i6) P:petersen_graph () ;
(%o6) GRAPH(10 vertices, 15 edges)

(%i12) draw_graph(P);
(%o12) done
```

Twierdzenie

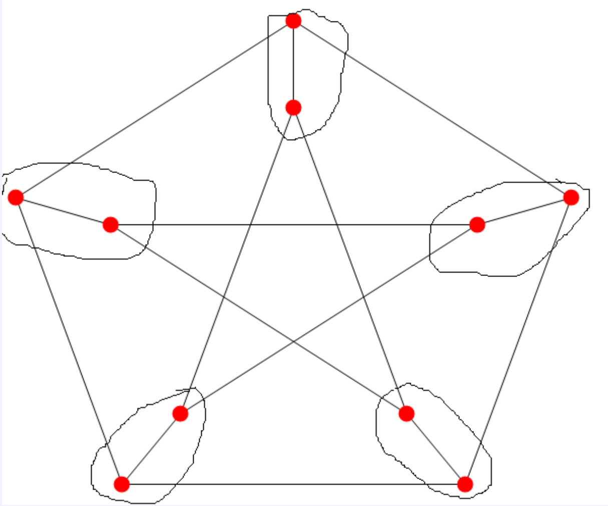
W 1930 roku K. Kuratowski udowodnił słynne twierdzenie, które mówi, że graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera minora, którym jest $K_{3,3}$ lub K_5.
Z twierdzenia Kuratowskiego wynika, że płaskość grafu jest własnością tylko kombinatoryczną, którą nazwaliśmy planarnością, i nie odwołuje się do geometrycznego pojęcia płaszczyzny. Wobec tego można zdefiniować graf planarny tylko kombinatorycznie.

> *Grafem planarnym nazywamy graf, który nie zawiera jako podgrafu minora izomorficznego z K_5 lub $K_{3,3}$.*

Graf Petersena



Graf Petersena – minor $\to K_5$



Uwagi o grafach planarnych

Każdy podgraf grafu planarnego jest grafem planarnym.

Uwagi o grafach planarnych

Każdy podgraf grafu planarnego jest grafem planarnym.

Każdy graf zawierający podgraf nieplanarny sam musi być nieplanarny.

Uwagi o grafach planarnych

Każdy podgraf grafu planarnego jest grafem planarnym.

Każdy graf zawierający podgraf nieplanarny sam musi być nieplanarny.

Każdy graf zawierający $K_{3,3}$ lub K_5 jako podgraf jest grafem nieplanarnym, co więcej, każdy graf nieplanarny musi zawierać jako minor co najmniej jeden z nich.

Obszary

Obszarem (ścianą) grafu płaskiego nazywamy część płaszczyzny wyznaczoną przez krawędzie danego grafu.

Obszary

Obszarem (ścianą) grafu płaskiego nazywamy część płaszczyzny wyznaczoną przez krawędzie danego grafu.

Każdy graf płaski posiada jeden nieograniczony obszar zwany obszarem zewnętrznym.

Obszary

Obszarem (ścianą) grafu płaskiego nazywamy część płaszczyzny wyznaczoną przez krawędzie danego grafu.

Każdy graf płaski posiada jeden nieograniczony obszar zwany obszarem zewnętrznym.

W 1750 roku L. Euler udowodnił

Twierdzenie

Niech G będzie grafem płaskim mającym n wierzchołków, m krawędzi, f obszarów oraz k składowych.
Wtedy $n - m + f = k + 1$.

Obszary

Obszarem (ścianą) grafu płaskiego nazywamy część płaszczyzny wyznaczoną przez krawędzie danego grafu.

Każdy graf płaski posiada jeden nieograniczony obszar zwany obszarem zewnętrznym.

W 1750 roku L. Euler udowodnił

Twierdzenie

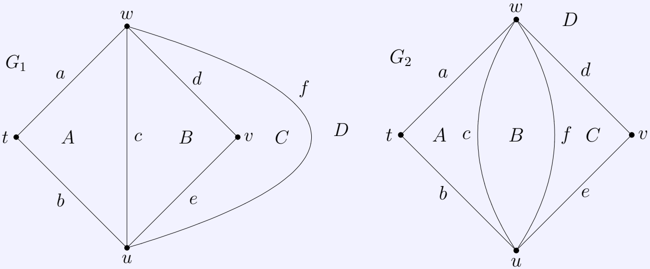
Niech G będzie grafem płaskim mającym n wierzchołków, m krawędzi, f obszarów oraz k składowych.
Wtedy $n - m + f = k + 1$.

Wniosek

Niech G będzie spójnym grafem płaskim, mającym n wierzchołków, m krawędzi oraz f obszarów. Wtedy $n - m + f = 2$.

Grafy płaskie izomorficzne

Grafy płaskie G_1 i G_2 są izomorficzne – obszary są różne.



Graf dualny do płaskiego

W każdym obszarze grafu płaskiego G umieszczamy wierzchołek grafu G^*.

Graf dualny do płaskiego

W każdym obszarze grafu płaskiego G umieszczamy wierzchołek grafu G^*.

Wierzchołki grafu G^* łączymy krawędzią, jeśli obszary odpowiadając tym wierzchołkom mają wspólna granicę.

Graf dualny do płaskiego

W każdym obszarze grafu płaskiego G umieszczamy wierzchołek grafu G^*.

Wierzchołki grafu G^* łączymy krawędzią, jeśli obszary odpowiadając tym wierzchołkom mają wspólna granicę.

Przez każdą graniczną krawędź grafu G przechodzi krawędź grafu G^*.

Graf dualny do płaskiego

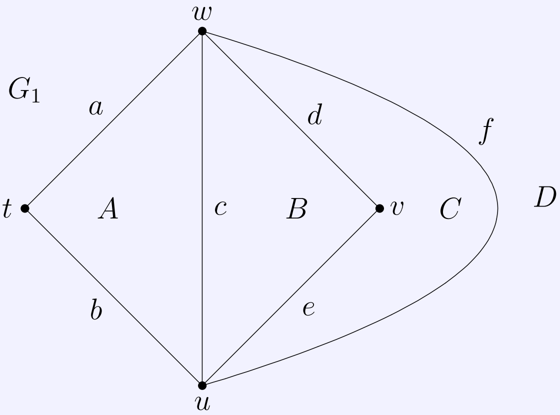
W każdym obszarze grafu płaskiego G umieszczamy wierzchołek grafu G^*.

Wierzchołki grafu G^* łączymy krawędzią, jeśli obszary odpowiadając tym wierzchołkom mają wspólna granicę.

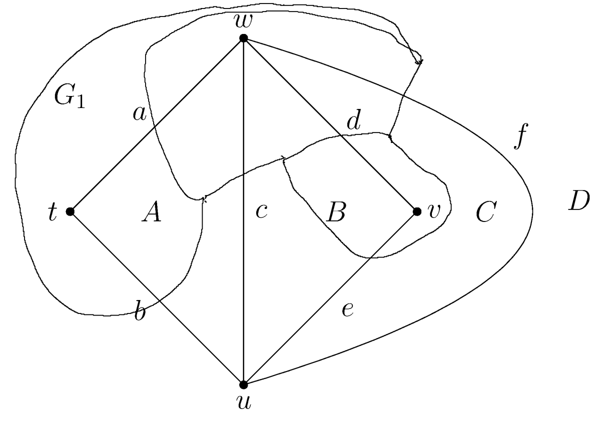
Przez każdą graniczną krawędź grafu G przechodzi krawędź grafu G^*.

Graf G^* jest płaski (i oczywiście planarny).

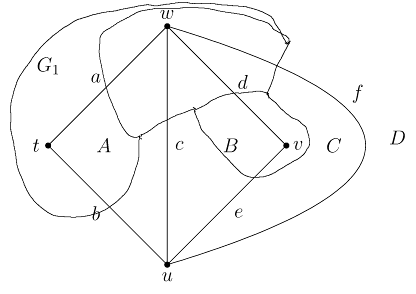
Graf płaski G_1

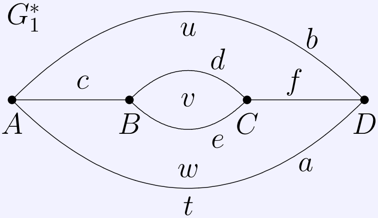


Konstrukcja grafu dualnego (1)

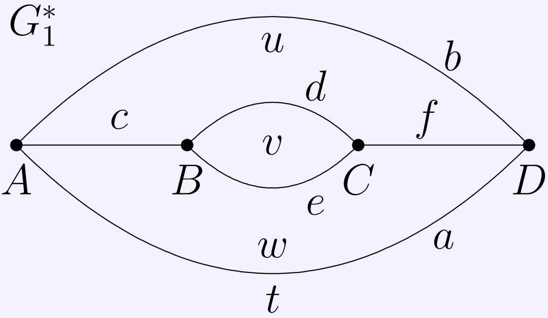


Konstrukcja grafu dualnego (2)

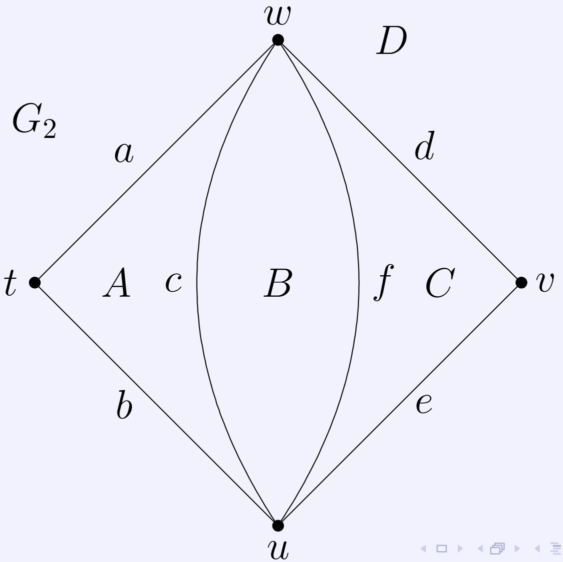




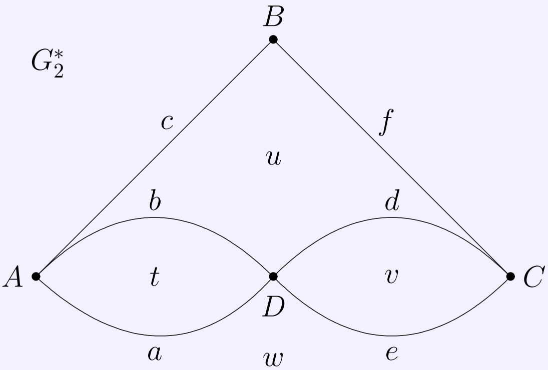
Graf dualny G_1^*



Graf płaski G_2



Graf dualny G_2^*



Definicja

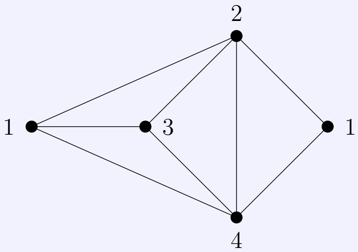
Graf bez pętli G jest k-kolorowalny prawidłowo, jeśli każdemu wierzchołkowi można przyporządkować jeden z k kolorów w taki sposób, że wierzchołki sąsiednie mają różne kolory.

Definicja

Graf bez pętli G jest k-kolorowalny prawidłowo, jeśli każdemu wierzchołkowi można przyporządkować jeden z k kolorów w taki sposób, że wierzchołki sąsiednie mają różne kolory.

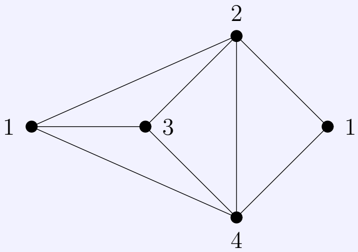
Przez $\chi(G)$ oznaczamy liczbę chromatyczną grafu G, czyli minimalną wartość k, dla której graf jest k-kolorowalny prawidłowo.

Przykład kolorowanania



1 – czerwony
2 – niebieski
3 – zielony
4 – żółty

Przykład kolorowanania



1 – czerwony
2 – niebieski
3 – zielony
4 – żółty

Wierzchołki grafu G można pokolorować czterema kolorami, a nie można trzema, więc jego liczba chromatyczna $\chi(G) = 4$.

Twierdzenia Brooksa i Vizinga

W 1941 roku R. L. Brooks udowodnił poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli G jest spójnym grafem prostym, w którym największy stopień wierzchołka jest równy k, nie jest grafem pełnym ani cyklem o nieparzystej długości, to graf G jest k-kolorowalny.

Twierdzenia Brooksa i Vizinga

W 1941 roku R. L. Brooks udowodnił poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli G jest spójnym grafem prostym, w którym największy stopień wierzchołka jest równy k, nie jest grafem pełnym ani cyklem o nieparzystej długości, to graf G jest k-kolorowalny.

W 1964 roku V. G. Vizing podał następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli największy stopień wierzchołka grafu G jest równy k, to graf G jest $(k+1)$-kolorowalny.

Wielomian chromatyczny

Niech G będzie grafem prostym i niech $P(G;k)$ będzie liczbą sposobów prawidłowego pokolorowania wierzchołków grafu G za pomocą k kolorów.

Wielomian chromatyczny

Niech G będzie grafem prostym i niech $P(G;k)$ będzie liczbą sposobów prawidłowego pokolorowania wierzchołków grafu G za pomocą k kolorów.

Funkcję $P(G;k)$ nazywamy funkcją chromatyczną grafu G.

Wielomian chromatyczny

Niech G będzie grafem prostym i niech $P(G;k)$ będzie liczbą sposobów prawidłowego pokolorowania wierzchołków grafu G za pomocą k kolorów.

Funkcję $P(G;k)$ nazywamy funkcją chromatyczną grafu G.

Funkcja chromatyczna grafu prostego jest wielomianem, dlatego $P(G;k)$ nazywamy wielomianem chromatycznym grafu G.

Wielomian chromatyczny

Niech G będzie grafem prostym i niech $P(G;k)$ będzie liczbą sposobów prawidłowego pokolorowania wierzchołków grafu G za pomocą k kolorów.

Funkcję $P(G;k)$ nazywamy funkcją chromatyczną grafu G.

Funkcja chromatyczna grafu prostego jest wielomianem, dlatego $P(G;k)$ nazywamy wielomianem chromatycznym grafu G.

Jeżeli $G = C_3$ jest trójkątem, to:

$$P(G;k) = k(k-1)(k-2).$$

Dowolny wierzchołek kolorujemy jednym z k kolorów, drugi – jednym z $k-1$ kolorów (innym niż k-ty), a trzeci – dowolnym z pozostałych $k-2$ kolorów.

Kolorowanie on-line

Kolejne wierzchołki są dołączane do grafu.
Nowy wierzchołek jest kolorowany kolorem o możliwie najniższym numerze tak, aby kolorowanie było prawidłowe.
Wierzchołek raz pokolorowany nie może zmienić koloru.

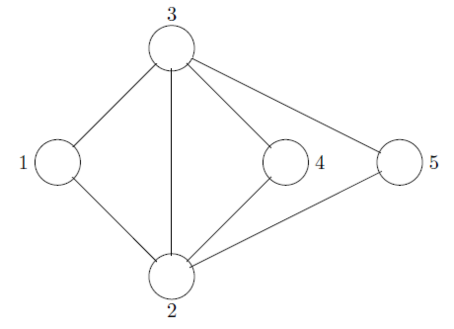
Kolorowanie on-line

Kolejne wierzchołki są dołączane do grafu.
Nowy wierzchołek jest kolorowany kolorem o możliwie najniższym numerze tak, aby kolorowanie było prawidłowe.
Wierzchołek raz pokolorowany nie może zmienić koloru.

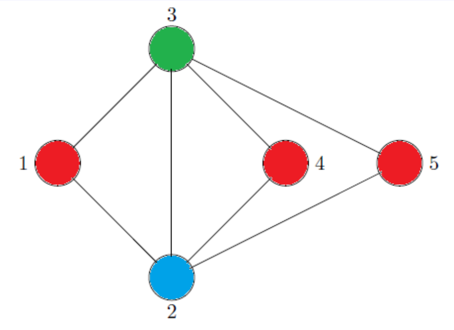
Zastosowanie. Kolejne węzły są dołączane do sieci.
Dołączony węzeł otrzymuje identyfikator, który powinien mieć możliwie najniższy numer różny od identyfikatorów węzłów z którymi będzie połączony.

Przykład – graf

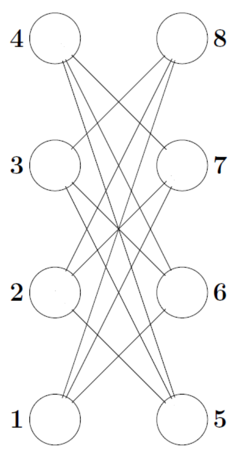
Kolorujemy kolejne wierzchołki w kolejności kolorów R, B, G.



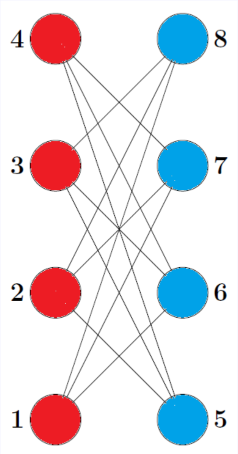
Przykład – graf pokolorowany



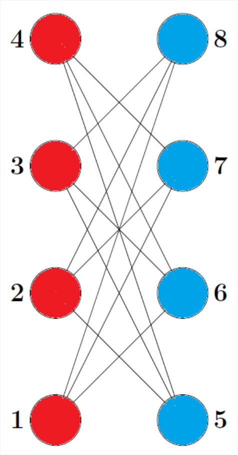
Graf

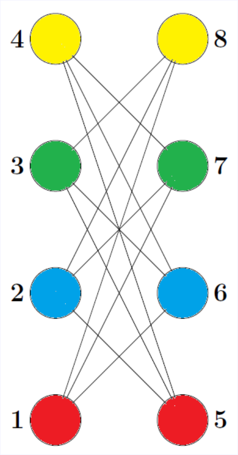


Kolejność 1 2 3 4 5 6 7 8

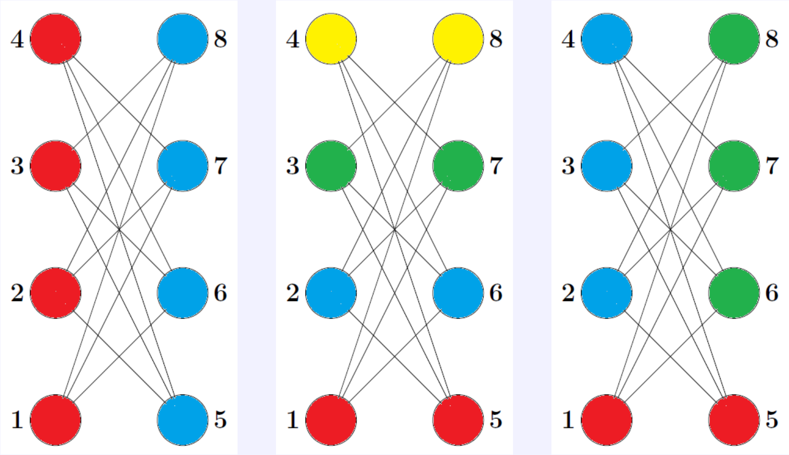


Kolejność 1 5 2 6 3 7 4 8





Kolejność: 1 5 2 8 7 6 4 3



Mapy (1)

Mapy do teorii grafów zostały wprowadzone przez jednego z największych specjalistów kombinatoryki XX wieku, W. Tutte'a.

Formalne zdefiniowanie tych obiektów miało na celu dokładniejsze zbadanie jednego z najważniejszych problemów XX wieku – problemu czterech barw.

Pierwszą definicję mapy (jako reprezentację grafu na płaszczyźnie, na której nie występują przecięcia krawędzi) stworzył J. Edmonds.

Mapy (2)

Załóżmy, że dana jest mapa przedstawiająca wiele państw.

Interesuje nas odpowiedź na pytanie: iloma kolorami można pokolorować tę mapę tak, by żadne dwa państwa mające wspólną granicę niezerowej długości nie były pokolorowane tym samym kolorem?

Jeżeli zbiór państw będzie zbiorem wierzchołków grafu i dwa wierzchołki będą połączone krawędzią, jeśli te państwa ze sobą graniczą, to problem pokolorowania mapy jest problemem pokolorowania grafu planarnego.

Kolorowanie grafu płaskiego

Jednym z najsłynniejszych twierdzeń dotyczących kolorowania map jest sformułowane poniżej twierdzenie o czterech barwach.

Twierdzenie

Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.

Kolorowanie grafu płaskiego

Jednym z najsłynniejszych twierdzeń dotyczących kolorowania map jest sformułowane poniżej twierdzenie o czterech barwach.

Twierdzenie

Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.

Twierdzenie o czterech barwach mówi, że każdą płaską mapę można pokolorować czterema kolorami tak, że każde dwa stykające się obszary będą miały różne kolory.

Kolorowanie grafu płaskiego

Jednym z najsłynniejszych twierdzeń dotyczących kolorowania map jest sformułowane poniżej twierdzenie o czterech barwach.

Twierdzenie

Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.

Twierdzenie o czterech barwach mówi, że każdą płaską mapę można pokolorować czterema kolorami tak, że każde dwa stykające się obszary będą miały różne kolory.

Dowód ze wspomaganiem komputera podali K. I. Appel i W. Haken dopiero w 1976 roku, a więc ponad sto lat po sformułowaniu problemu.