Matematyka Dyskretna

Wykład 8
Cykle i drzewa

Wojciech Kordecki
wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Cykl Eulera

Droga Eulera w grafie skierowanym lub nieskierowanym to droga zawierająca wszystkie krawędzie lub łuki grafu, każdą dokładnie raz. Cykl Eulera to cykl zawierający wszystkie krawędzie lub łuki grafu. Graf, w którym istnieje cykl Eulera, nazywamy grafem eulerowskim, a gdy istnieje tylko droga Eulera – grafem półeulerowskim.

Cykl Eulera – własności

W 1736 roku L. Euler podał warunek konieczny i dostateczny na to, aby graf był eulerowski.

Twierdzenie

Graf nieskierowany spójny G jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty.

Cykl Eulera – własności

W 1736 roku L. Euler podał warunek konieczny i dostateczny na to, aby graf był eulerowski.

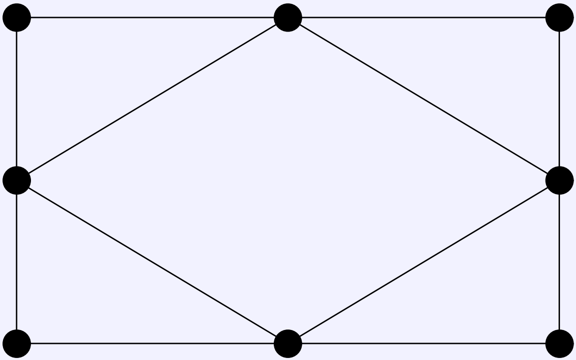
Twierdzenie

Graf nieskierowany spójny G jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty.

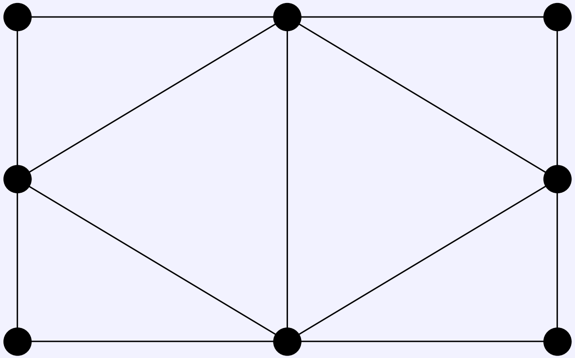
Wniosek

Graf nieskierowany spójny jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy jego zbiór krawędzi można podzielić na dwa rozłączne cykle (niekoniecznie proste).

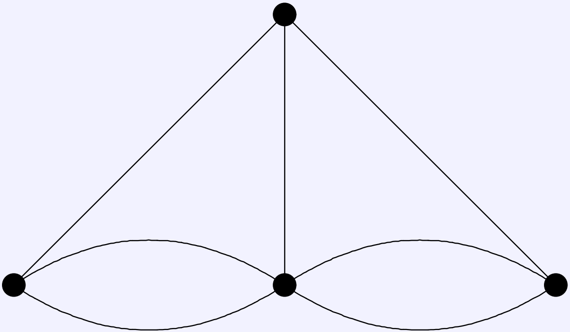
Cykl Eulera – przykład



Droga Eulera



Mosty królewieckie – rozwiązanie



Wszystkie cztery wierzchołki mają nieparzysty stopień.
Nie ma ani cyklu Eulera ani drogi Eulera.

Droga i cykl w grafie skierowanym

Droga – ciąg wierzchołków i łuków:

$$v_1, (v_1, v_2), v_2, \ldots, v_{n-1}, (v_{n-1}, v_n), v_n .$$

Cykl, gdy $v_1 = v_n$.

Droga i cykl w grafie skierowanym

Droga – ciąg wierzchołków i łuków:

$$v_1, (v_1, v_2), v_2, \ldots, v_{n-1}, (v_{n-1}, v_n), v_n .$$

Cykl, gdy $v_1 = v_n$.

Droga prosta, gdy nie powtarzają się wierzchołki i łuki.
Cykl prosty j.w., wyjątkiem $v_1 = v_n$.
Długość – liczba łuków w drodze lub cyklu.

Cykl Eulera – grafy skierowane

Twierdzenie

Graf skierowany spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v zachodzi $d^-(v) = d^+(v)$.

Droga Hamiltona

Droga Hamiltona w grafie skierowanym lub nieskierowanym $G = (V, E)$ to droga prosta, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu.

Droga Hamiltona

Droga Hamiltona w grafie skierowanym lub nieskierowanym $G = (V, E)$ to droga prosta, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu.

Cykl Hamiltona w grafie $G = (V, E)$ to cykl zawierający wszystkie wierzchołki grafu. Graf, w którym istnieje cykl Hamiltona, nazywamy grafem hamiltonowskim.

Kod Graya

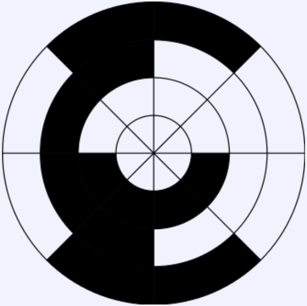
Związek cyklu Hamiltona w grafie nieskierowanym z kodem Graya (wykład z podstaw teorii informacji!)

Kod Graya

Związek cyklu Hamiltona w grafie nieskierowanym z kodem Graya (wykład z podstaw teorii informacji!)

Kod Graya długości (rzędu) n to ciąg wszystkich n-elementowych wektorów binarnych, w których dwa kolejne wektory (oraz pierwszy i ostatni) różnią się dokładnie jednym elementem.
Dla $n = 3$ mamy 8 wektorów binarnych:

0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1



Kod Graya c.d.

Konstrukcja kodu Graya jest następująca. Niech $V(G)$ będzie rodziną $\{0,1\}^n$ wszystkich ciągów cyfr dwójkowych długości n i połączmy ciągi u oraz v krawędzią, jeśli u oraz v różnią się dokładnie jedną cyfrą – odległość Hamminga równa 1!.

Kod Graya c.d.

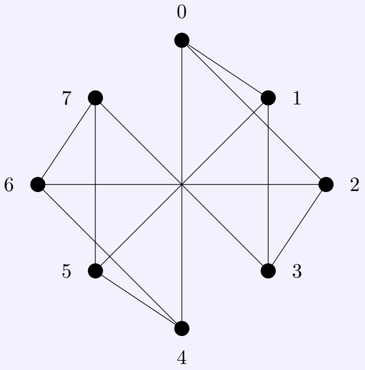
Konstrukcja kodu Graya jest następująca. Niech $V(G)$ będzie rodziną $\{0,1\}^n$ wszystkich ciągów cyfr dwójkowych długości n i połączmy ciągi u oraz v krawędzią, jeśli u oraz v różnią się dokładnie jedną cyfrą – odległość Hamminga równa 1!.

Kod Graya długości n w tak otrzymanym grafie Graya G jest w istocie cyklem Hamiltona w tym grafie.

Graf Graya

Dla $n = 3$ mamy 8 wektorów binarnych:

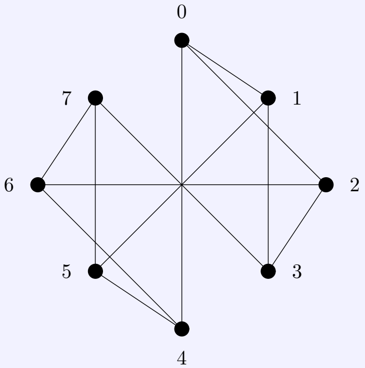
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1



Graf Graya

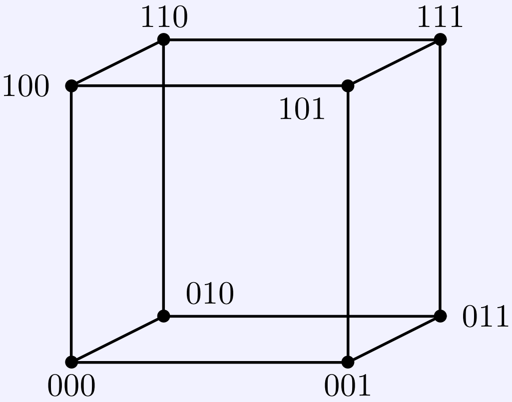
Dla $n = 3$ mamy 8 wektorów binarnych:

0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

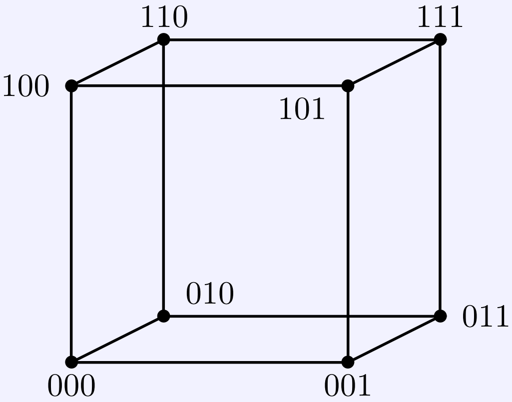


Cyklem Hamiltona jest na przykład ciąg wierzchołków $(0, 1, 3, 7, 5, 4, 6, 2, 0)$ lub $(0, 2, 3, 1, 5, 7, 6, 4, 0)$.

Kostka

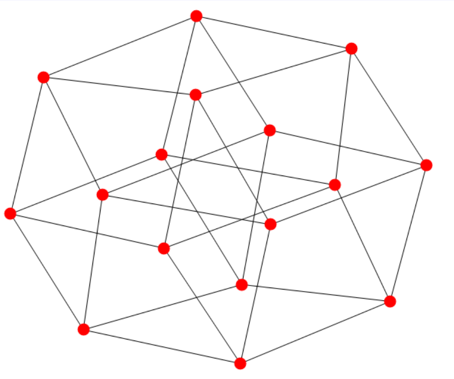


Kostka

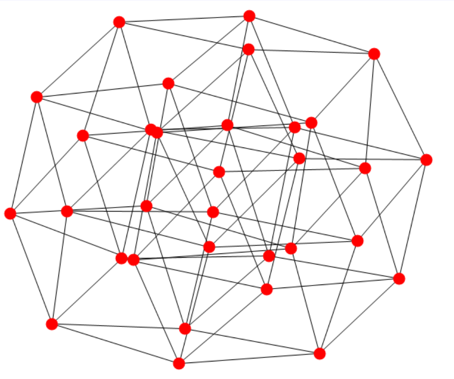


To też jest graf Graya!

Kostka 4d



Kostka 5d



Graf pełny K_n

Graf nieskierowany $G = (V, E)$ jest grafem pełnym K_n, gdy $|V| = n$ oraz E jest zbiorem wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru V.

Graf pełny K_n

Graf nieskierowany $G = (V, E)$ jest grafem pełnym K_n, gdy $|V| = n$ oraz E jest zbiorem wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru V.

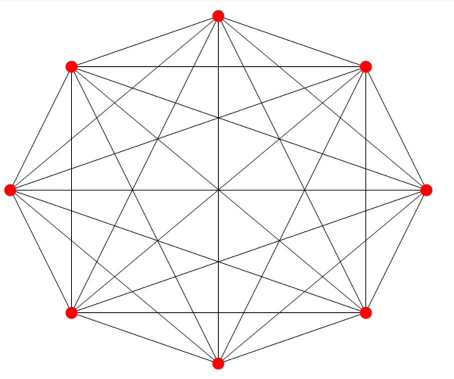
W K_n każdy wierzchołek jest połączony z każdym.

Twierdzenie

Graf pełny K_n

- *jest hamiltonowski dla każdego $n \geq 3$,*
- *zawiera $\frac{(n-1)!}{2}$ cykli Hamiltona.*

Graf K_8



Nadgraf grafu hamiltonowskiego

Jeżeli G' jest podgrafem grafu G'', to G'' jest nadgrafem grafu G'.

Własność

Jeśli graf G jest hamiltonowski, to jego nadgraf też jest hamiltonowski.

Twierdzenie Diraca

Twierdzenie

Jeśli $G = (V, E)$ *jest grafem prostym nieskierowanym,* $|V| = n$ *oraz*

$$d(v) \geq \frac{n}{2},$$

dla każdego wierzchołka $v \in V$*, to* G *jest hamiltonowski.*

Twierdzenie Diraca

Twierdzenie

Jeśli $G = (V, E)$ *jest grafem prostym nieskierowanym,* $|V| = n$ *oraz*

$$d(v) \geq \frac{n}{2},$$

dla każdego wierzchołka $v \in V$*, to* G *jest hamiltonowski.*

Jest to warunek dostateczny, ale nie konieczny!

Twierdzenie Diraca

Twierdzenie

Jeśli $G = (V, E)$ *jest grafem prostym nieskierowanym,* $|V| = n$ *oraz*

$$d(v) \geq \frac{n}{2},$$

dla każdego wierzchołka $v \in V$*, to* G *jest hamiltonowski.*

Jest to warunek dostateczny, ale nie konieczny!

Cykl o pięciu wierzchołkach jest oczywiście hamiltonowski, chociaż:

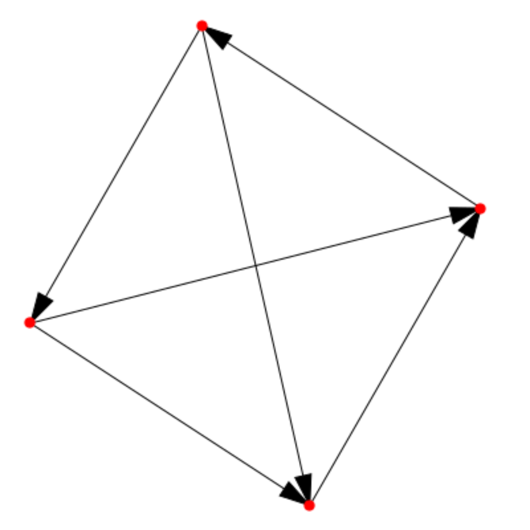
$$d(v) = 2 < \frac{5}{2}.$$

Turniej – definicja

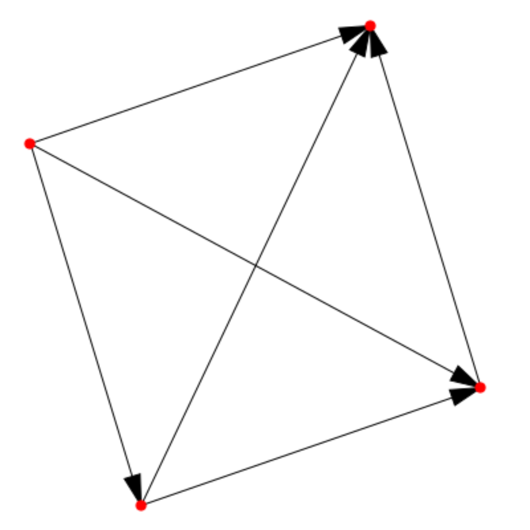
Rozważmy pewien turniej dla grupy n graczy, polegający na tym, że każdy gra z każdym, przy czym wynikiem pojedynku jest zwycięstwo jednego z dwóch graczy (remisy są wykluczone).

Graf skierowany bez pętli $D = (V, E)$, $|V| = n$, nazywamy turniejem (ang. *tournament*), jeśli dla każdej pary wierzchołków u oraz v zawiera on dokładnie jeden łuk: albo (u, v), albo (v, u).

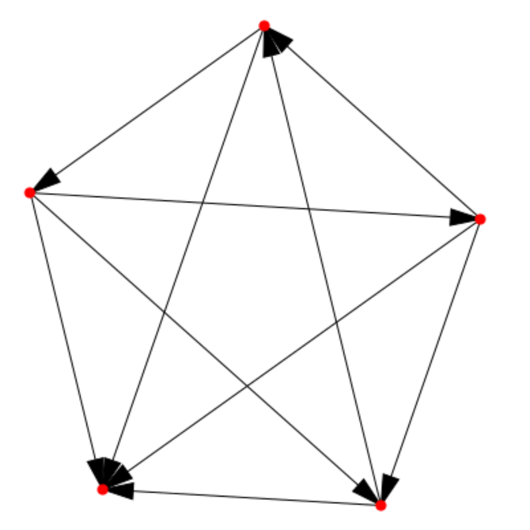
Turniej – przykład dla $n = 4$ (1)



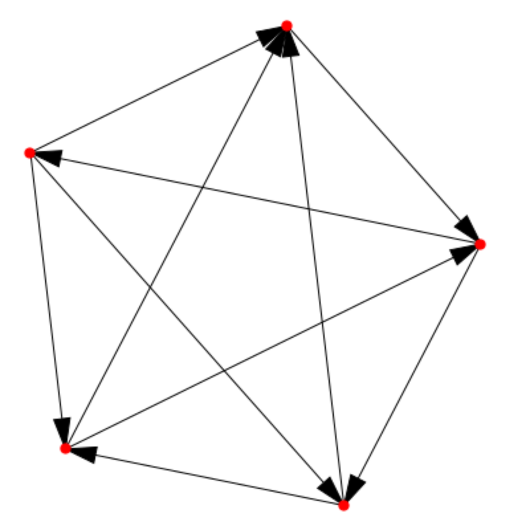
Turniej – przykład dla $n = 4$ (2)



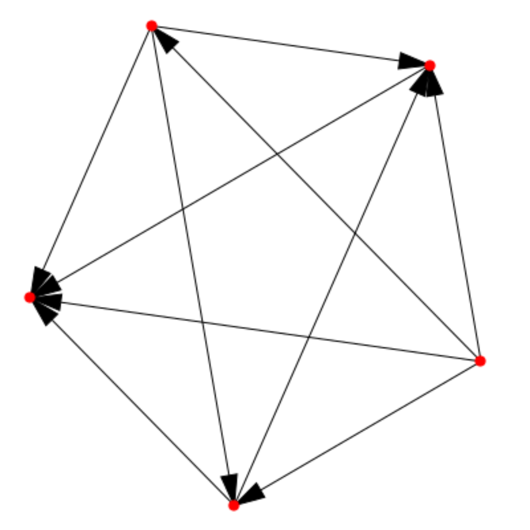
Turniej – przykład dla $n = 5$ (1)



Turniej – przykład dla $n = 5$ (2)



Turniej – przykład dla $n = 5$ (3)



Turnieje i drogi Hamiltona

Łuk (u, v) oznacza że „u pokonał v". Turniej może reprezentować wyniki spotkań par uczestników w rozgrywkach typu „każdy z każdym" (bez remisów), na przykład turnieju tenisowego lub innej gry, w której nie ma remisów.

Turnieje i drogi Hamiltona

Łuk (u, v) oznacza że „u pokonał v". Turniej może reprezentować wyniki spotkań par uczestników w rozgrywkach typu „każdy z każdym" (bez remisów), na przykład turnieju tenisowego lub innej gry, w której nie ma remisów.

W graficznym przedstawieniu turnieju skierowana droga $p_1, p_2, \ldots, p_r$ to ciąg graczy, w którym p_1 pokonał p_2, p_2 pokonał p_3, $\ldots$, p_{r-1} pokonał p_r.

Turnieje i drogi Hamiltona

Łuk (u, v) oznacza że „u pokonał v". Turniej może reprezentować wyniki spotkań par uczestników w rozgrywkach typu „każdy z każdym" (bez remisów), na przykład turnieju tenisowego lub innej gry, w której nie ma remisów.

W graficznym przedstawieniu turnieju skierowana droga $p_1, p_2, \ldots, p_r$ to ciąg graczy, w którym p_1 pokonał p_2, p_2 pokonał p_3, ..., p_{r-1} pokonał p_r.

W 1934 roku L. Rédei udowodnił poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Każdy turniej zawiera drogę Hamiltona.

Izomorfizm – grafy nieskierowane

Niech $G = (V, E) = (V, R)$ będzie grafem nieskierowanym prostym gdzie $uRw \iff \{u, w\} \in E$.
Grafy nieskierowane proste $G_1 = (V_1, R_1)$ i $G_2 = (V_2, R_2)$ są izomorficzne, gdy istnieje funkcja $f : V_1 \to V_2$ taka, że

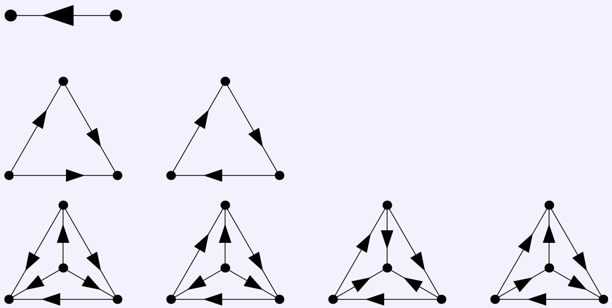
$$uR_1w \iff f(u)\, R_2 f(w).$$

Izomorfizm – grafy skierowane

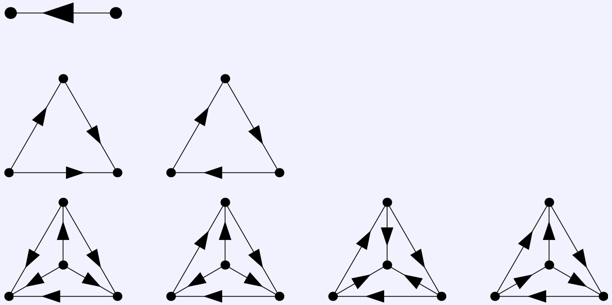
Niech $G = (V, E) = (V, R)$ będzie grafem skierowanym prostym gdzie $uRw \iff (u, w) \in E$.
Grafy skierowane proste $G_1 = (V_1, R_1)$ i $G_2 = (V_2, R_2)$ są izomorficzne, gdy istnieje funkcja $f : V_1 \to V_2$ taka, że

$$uR_1w \iff f(u)\, R_2 f(w)\,.$$

Liczba turniejów nieizomorficznych



Liczba turniejów nieizomorficznych



Liczba niezomorficznych turniejów na $n = 2, 3, 4 \ldots$ wierzchołkach jest równa $1, 2, 4, 12, 56, 456, \ldots$

https://mathworld.wolfram.com/Tournament.html

Drzewo i las – definicje

Przypomnijmy, że drzewem nazywamy graf spójny bez cykli. Graf acykliczny (niekoniecznie spójny) to las.

Wierzchołek drzewa, który jest końcem tylko jednej krawędzi, nazywa się liściem.

Korzeń drzewa to dowolny wyróżniony jego wierzchołek.

Drzewo i las – definicje

Przypomnijmy, że drzewem nazywamy graf spójny bez cykli. Graf acykliczny (niekoniecznie spójny) to las.

Wierzchołek drzewa, który jest końcem tylko jednej krawędzi, nazywa się liściem.

Korzeń drzewa to dowolny wyróżniony jego wierzchołek.

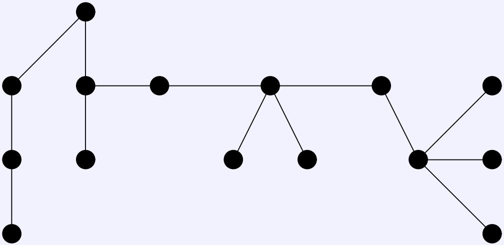
Most to krawędź grafu, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych tego grafu.

Drzewo i las – definicje

Przypomnijmy, że drzewem nazywamy graf spójny bez cykli. Graf acykliczny (niekoniecznie spójny) to las.
Wierzchołek drzewa, który jest końcem tylko jednej krawędzi, nazywa się liściem.
Korzeń drzewa to dowolny wyróżniony jego wierzchołek.

Most to krawędź grafu, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych tego grafu.

Przykład.

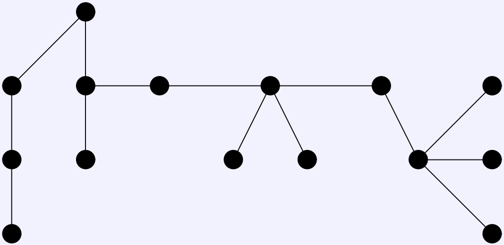


Drzewo i las – definicje

Przypomnijmy, że drzewem nazywamy graf spójny bez cykli. Graf acykliczny (niekoniecznie spójny) to las.
Wierzchołek drzewa, który jest końcem tylko jednej krawędzi, nazywa się liściem.
Korzeń drzewa to dowolny wyróżniony jego wierzchołek.

Most to krawędź grafu, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych tego grafu.

Przykład.



Drzewa – warunki

Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach.
Wówczas równoważne są następujące stwierdzenia:

1. *G jest drzewem.*

Drzewa – warunki

Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach.
Wówczas równoważne są następujące stwierdzenia:

1. *G jest drzewem.*
2. *G nie zawiera cykli i ma $n-1$ krawędzi.*

Drzewa – warunki

Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach.
Wówczas równoważne są następujące stwierdzenia:

1. *G jest drzewem.*
2. *G nie zawiera cykli i ma $n-1$ krawędzi.*
3. *G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.*

Drzewa – warunki

Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach.
Wówczas równoważne są następujące stwierdzenia:

1. *G jest drzewem.*
2. *G nie zawiera cykli i ma $n-1$ krawędzi.*
3. *G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.*
4. *G jest spójny i każda krawędź jest mostem.*

Drzewa – warunki

Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach.
Wówczas równoważne są następujące stwierdzenia:

1. *G jest drzewem.*
2. *G nie zawiera cykli i ma $n-1$ krawędzi.*
3. *G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.*
4. *G jest spójny i każda krawędź jest mostem.*
5. *Dowolne dwa wierzchołki G są połączone dokładnie jedną drogą.*

Drzewa – warunki

Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach.
Wówczas równoważne są następujące stwierdzenia:

1. *G jest drzewem.*
2. *G nie zawiera cykli i ma $n-1$ krawędzi.*
3. *G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.*
4. *G jest spójny i każda krawędź jest mostem.*
5. *Dowolne dwa wierzchołki G są połączone dokładnie jedną drogą.*
6. *Graf G nie zawiera cykli i dołączenie dowolnej nowej krawędzi do G tworzy dokładnie jeden cykl.*

Drzewa –własności

Wniosek

W drzewie o $n \geq 2$ wierzchołkach co najmniej dwa są stopnia 1.

Drzewa –własności

Wniosek

W drzewie o $n \geq 2$ wierzchołkach co najmniej dwa są stopnia 1.

Wniosek

Jeśli graf G jest lasem, który ma n wierzchołków oraz k składowych, to G ma $n - k$ krawędzi.

Drzewa binarne

Ważną odmianą drzew z korzeniem jest klasa drzew binarnych

Drzewa binarne

Ważną odmianą drzew z korzeniem jest klasa drzew binarnych

Drzewo binarne zdefiniowane rekurencyjnie jest drzewem.

Drzewa binarne

Ważną odmianą drzew z korzeniem jest klasa drzew binarnych

Drzewo binarne zdefiniowane rekurencyjnie jest drzewem.

Drzewo binarne, które nie ma żadnych węzłów, nazywa się drzewem pustym.

Drzewa binarne

Ważną odmianą drzew z korzeniem jest klasa drzew binarnych

Drzewo binarne zdefiniowane rekurencyjnie jest drzewem.

Drzewo binarne, które nie ma żadnych węzłów, nazywa się drzewem pustym.

Jeśli lewe poddrzewo jest niepuste, to korzeń tego poddrzewa nazywa się lewym następnikiem korzenia drzewa głównego.

Drzewa binarne

Ważną odmianą drzew z korzeniem jest klasa drzew binarnych

Drzewo binarne zdefiniowane rekurencyjnie jest drzewem.

Drzewo binarne, które nie ma żadnych węzłów, nazywa się drzewem pustym.

Jeśli lewe poddrzewo jest niepuste, to korzeń tego poddrzewa nazywa się lewym następnikiem korzenia drzewa głównego.

Korzeń niepustego prawego poddrzewa jest prawym następnikiem korzenia drzewa głównego. Jeśli poddrzewo jest puste, to mówimy, że brakuje następnika.

Drzewa binarne

Ważną odmianą drzew z korzeniem jest klasa drzew binarnych

Drzewo binarne zdefiniowane rekurencyjnie jest drzewem.

Drzewo binarne, które nie ma żadnych węzłów, nazywa się drzewem pustym.

Jeśli lewe poddrzewo jest niepuste, to korzeń tego poddrzewa nazywa się lewym następnikiem korzenia drzewa głównego.

Korzeń niepustego prawego poddrzewa jest prawym następnikiem korzenia drzewa głównego. Jeśli poddrzewo jest puste, to mówimy, że brakuje następnika.

Każdy wierzchołek drzewa binarnego może mieć tylko 0, 1 lub 2 poddrzewa.

Drzewo binarne – rekurencyjnie

Drzewem binarnym T o n wierzchołkach nazywa się drzewo puste $T = \emptyset$, gdy $n = 0$, lub trójkę $T = (L, r, P)$, gdzie r jest wierzchołkiem zwanym *korzeniem drzewa*. L jest drzewem binarnym o l wierzchołkach (zwanym lewym poddrzewem), a jego korzeń jest lewym potomkiem wierzchołka r. P jest drzewem binarnym o p wierzchołkach (zwanym prawym poddrzewem), a jego korzeń jest prawym potomkiem wierzchołka r. Jeśli $T = (\emptyset, s, \emptyset)$, to wierzchołek s nazywa się *liściem drzewa*. Liczby wierzchołków obu poddrzew spełniają równość $l + p + 1 = n$.

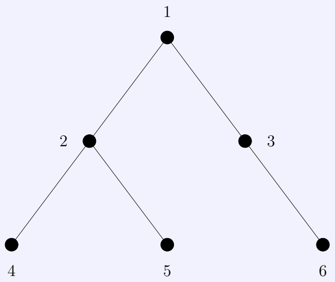
Drzewo binarne – rekurencyjnie

Drzewem binarnym T o n wierzchołkach nazywa się drzewo puste $T = \emptyset$, gdy $n = 0$, lub trójkę $T = (L, r, P)$, gdzie r jest wierzchołkiem zwanym *korzeniem drzewa*. L jest drzewem binarnym o l wierzchołkach (zwanym lewym poddrzewem), a jego korzeń jest lewym potomkiem wierzchołka r. P jest drzewem binarnym o p wierzchołkach (zwanym prawym poddrzewem), a jego korzeń jest prawym potomkiem wierzchołka r. Jeśli $T = (\emptyset, s, \emptyset)$, to wierzchołek s nazywa się *liściem drzewa*. Liczby wierzchołków obu poddrzew spełniają równość $l + p + 1 = n$.

Rekurencja polega tutaj na tym, że każdy element trójki definiującej drzewo odwołuje się do informacji zawartej w wyznaczonych poprzednio mniejszych drzewach.

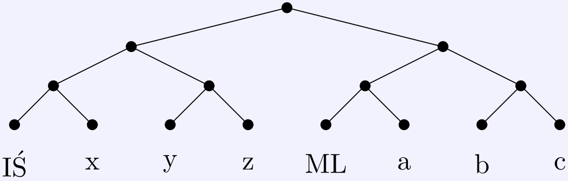
Drzewo binarne – przykład

- $T_1 = (T_2, 1, T_3)$ wierzchołek 1 jest korzeniem,
- $T_2 = (T_4, 2, T_5)$, $T_3 = (\emptyset, 3, T_6)$, wierzchołki 2 i 3 są korzeniami drzew T_2 i T_3. Drzewo T_3 ma tylko lewego potomka.
- $T_4 = (\emptyset, 4, \emptyset)$, $T_5 = (\emptyset, 5, \emptyset)$, $T_6 = (\emptyset, 6, \emptyset)$. Wierzchołki 4, 5 i 6 są liśćmi.



Turniej – faza pucharowa

Tzw. drabinka:



Zawodniczki IŚ i ML są rozstawione.
Mogą się ew. spotkać dopiero w finale.

Definicja i konstrukcja

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ każde drzewo $T = (V, E')$ takie, że $E' \subset E$, nazywamy drzewem rozpinającym, dendrytem lub drzewem spinającym (ang. spanning tree) grafu G.

Definicja i konstrukcja

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ każde drzewo $T = (V, E')$ takie, że $E' \subset E$, nazywamy drzewem rozpinającym, dendrytem lub drzewem spinającym (ang. spanning tree) grafu G.
Graf i jego drzewa spinające mają ten sam zbiór wierzchołków.

Definicja i konstrukcja

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ każde drzewo $T = (V, E')$ takie, że $E' \subset E$, nazywamy drzewem rozpinającym, dendrytem lub drzewem spinającym (ang. spanning tree) grafu G.
Graf i jego drzewa spinające mają ten sam zbiór wierzchołków.
Jeśli wybierzemy jakiś cykl w grafie spójnym G i usuniemy którąkolwiek krawędź tego cyklu, to otrzymany graf będzie nadal spójny.

Definicja i konstrukcja

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ każde drzewo $T = (V, E')$ takie, że $E' \subset E$, nazywamy drzewem rozpinającym, dendrytem lub drzewem spinającym (ang. spanning tree) grafu G.
Graf i jego drzewa spinające mają ten sam zbiór wierzchołków.
Jeśli wybierzemy jakiś cykl w grafie spójnym G i usuniemy którąkolwiek krawędź tego cyklu, to otrzymany graf będzie nadal spójny.
Możemy powtarzać tę procedurę z dowolnym z pozostałych cykli dotąd, aż w grafie nie będzie już cykli.

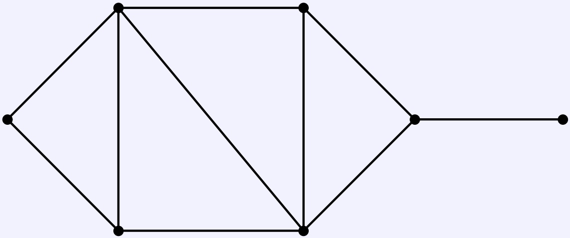
Definicja i konstrukcja

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ każde drzewo $T = (V, E')$ takie, że $E' \subset E$, nazywamy drzewem rozpinającym, dendrytem lub drzewem spinającym (ang. spanning tree) grafu G.
Graf i jego drzewa spinające mają ten sam zbiór wierzchołków.
Jeśli wybierzemy jakiś cykl w grafie spójnym G i usuniemy którąkolwiek krawędź tego cyklu, to otrzymany graf będzie nadal spójny.
Możemy powtarzać tę procedurę z dowolnym z pozostałych cykli dotąd, aż w grafie nie będzie już cykli.
Powstanie w ten sposób drzewo, które spina wszystkie wierzchołki grafu.

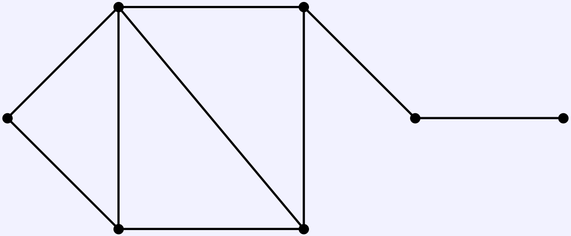
Definicja i konstrukcja

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ każde drzewo $T = (V, E')$ takie, że $E' \subset E$, nazywamy drzewem rozpinającym, dendrytem lub drzewem spinającym (ang. spanning tree) grafu G.
Graf i jego drzewa spinające mają ten sam zbiór wierzchołków.
Jeśli wybierzemy jakiś cykl w grafie spójnym G i usuniemy którąkolwiek krawędź tego cyklu, to otrzymany graf będzie nadal spójny.
Możemy powtarzać tę procedurę z dowolnym z pozostałych cykli dotąd, aż w grafie nie będzie już cykli.
Powstanie w ten sposób drzewo, które spina wszystkie wierzchołki grafu.
Takie drzewo jest drzewem spinającym grafu G.

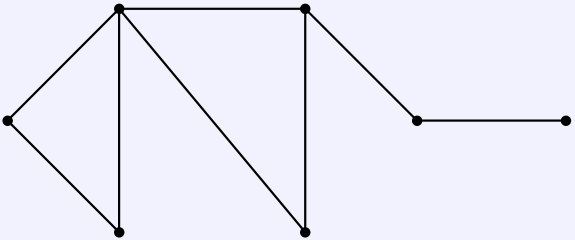
Przykład drzewa spinającego (1)



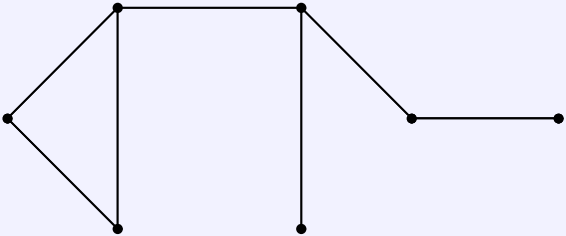
Przykład drzewa spinającego (2)



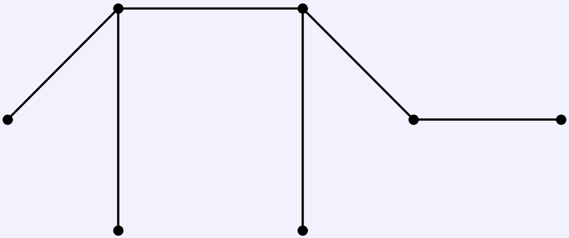
Przykład drzewa spinającego (3)



Przykład drzewa spinającego (4)



Przykład drzewa spinającego (5)



Cięcie grafu

Zbiorem rozspajającym grafu spójnego G nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.

Cięcie grafu

Zbiorem rozspajającym grafu spójnego G nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.

Cięciem grafu G jest minimalny zbiór rozspajający ten graf (to znaczy żaden jego podzbiór właściwy nie jest zbiorem rozspajającym).

Cięcie grafu

Zbiorem rozspajającym grafu spójnego G nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.

Cięciem grafu G jest minimalny zbiór rozspajający ten graf (to znaczy żaden jego podzbiór właściwy nie jest zbiorem rozspajającym).

Spójnością krawędziową $\lambda(G)$ grafu spójnego G nazywamy najmniejszą liczbę krawędzi, które należy usunąć, by graf przestał być spójny.

Cięcie grafu

Zbiorem rozspajającym grafu spójnego G nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.

Cięciem grafu G jest minimalny zbiór rozspajający ten graf (to znaczy żaden jego podzbiór właściwy nie jest zbiorem rozspajającym).

Spójnością krawędziową $\lambda(G)$ grafu spójnego G nazywamy najmniejszą liczbę krawędzi, które należy usunąć, by graf przestał być spójny.

Graf G jest k-spójnym krawędziowo jeśli $\lambda(G) \geq k$.

Cięcie grafu

Zbiorem rozspajającym grafu spójnego G nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.

Cięciem grafu G jest minimalny zbiór rozspajający ten graf (to znaczy żaden jego podzbiór właściwy nie jest zbiorem rozspajającym).

Spójnością krawędziową $\lambda(G)$ grafu spójnego G nazywamy najmniejszą liczbę krawędzi, które należy usunąć, by graf przestał być spójny.

Graf G jest k-spójnym krawędziowo jeśli $\lambda(G) \geq k$.

Jeśli cięcie składa się z jednej krawędzi, to jest ona mostem.

Dwa twierdzenia dualne

Twierdzenie

Jeśli T jest lasem spinającym grafu G, to każde cięcie grafu G ma wspólną krawędź z T.

Dwa twierdzenia dualne

Twierdzenie

Jeśli T jest lasem spinającym grafu G, to każde cięcie grafu G ma wspólną krawędź z T.

Dopełnieniem podgrafu $G' = (V, E')$ grafu $G = (V, E)$ jest podgraf $G'' = (V, E'')$ taki, że $E'' = E \setminus E'$.

Dwa twierdzenia dualne

Twierdzenie

Jeśli T jest lasem spinającym grafu G, to każde cięcie grafu G ma wspólną krawędź z T.

Dopełnieniem podgrafu $G' = (V, E')$ grafu $G = (V, E)$ jest podgraf $G'' = (V, E'')$ taki, że $E'' = E \setminus E'$.

Twierdzenie

Jeżeli T^* jest dopełnieniem lasu spinającego T w grafie G, to każdy cykl ma wspólną krawędź z T^*.

Kodrzewo i kocykl

Kodrzewem (ang. *cotree*) nazywamy dopełnienie drzewa, kocyklem (ang. cocyle) – minimalne cięcie.

Twierdzenie

W dowolnym grafie cykl i kocykl mają parzystą liczbę wspólnych elementów.

Ile jest drzew?

W 1889 roku A. Cayley udowodnił poniższe twierdzenie.

Ile jest drzew?

W 1889 roku A. Cayley udowodnił poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Istnieje n^{n-2} różnych drzew mających n wierzchołków.

Dopełnienie algebraiczne

Niech A_{ij} będzie podmacierzą powstałą z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Definicja

Liczbę

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

nazywa się dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}.

Dopełnienie algebraiczne

Niech A_{ij} będzie podmacierzą powstałą z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Definicja

Liczbę

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

nazywa się dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}.

Przykład.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$d_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = 2.$$

Twierdzenie

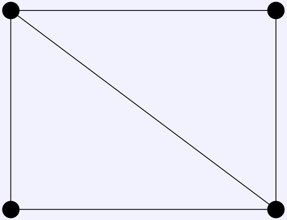
Niech G będzie spójnym grafem prostym, którego zbiorem wierzchołków jest $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, i niech $M = [m_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $n \times n$:

$$m_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \text{dla } i = j, \\ -1 & \text{gdy wierzchołki } v_i \text{ i } v_j \text{ są sąsiednie,} \\ 0 & \text{gdy wierzchołki } v_i \text{ i } v_j \text{ nie są sąsiednie.} \end{cases}$$

Wtedy liczba drzew spinających grafu G jest równa dopełnieniu algebraicznemu dowolnego wyrazu macierzy M.

Przykład

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

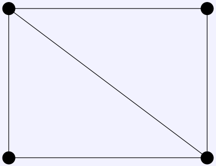


Wyznaczamy dopełnienie algebraiczne dowolnego elementu. Na przykład dopełnienie elementu m_{11}:

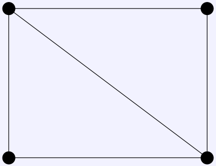
$$2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 - 2 = 8$$

Oznacza to, że graf G ma 8 drzew spinających.

Przykład c.d.



Przykład c.d.



Tylko dwa są nieizomorficzne: