Matematyka Dyskretna

Wykład 7

Grafy – wprowadzenie

Wojciech Kordecki
wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Motywacja

Graf przedstawia pewien zbiór punktów i pokazuje, w jaki sposób są one połączone.
Jest strukturą matematyczną służącą do opisu i badania relacji między obiektami.

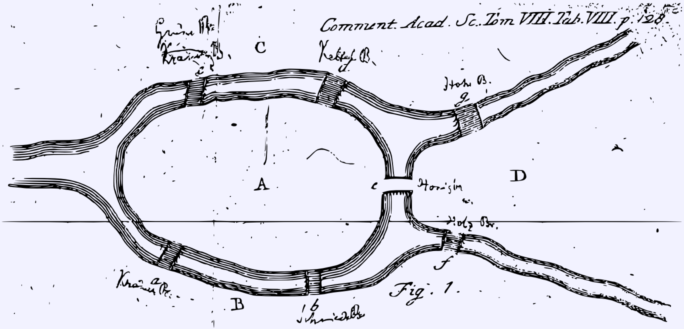
Motywacja

Graf przedstawia pewien zbiór punktów i pokazuje, w jaki sposób są one połączone.
Jest strukturą matematyczną służącą do opisu i badania relacji między obiektami.

Za pierwszego teoretyka i badacza grafów uważa się Leonharda Eulera, który za pomocą grafów rozwiązał w 1736 roku problem mostów królewieckich oraz sformułował problem bardziej ogólny i podał jego rozwiązanie.
Rozwiązanie tego zagadnienia jest uznawane za pierwszą pracę na temat teorii grafów.

Mosty królewieckie

Mosty królewieckie – układ



Mosty królewieckie – problem

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 8, 1741, s. 128–140.

Mosty królewieckie – problem

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 8, 1741, s. 128–140.

Euler sformułował problem:
Czy można po siedmiu mostach łączących dzielnice miasta z wyspą na Pregole odbyć spacer w ten sposób, by przejść kolejno przez wszystkie mosty, nie przechodząc po żadnym z nich więcej niż jeden raz?

Mosty królewieckie – problem

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 8, 1741, s. 128–140.

Euler sformułował problem:
Czy można po siedmiu mostach łączących dzielnice miasta z wyspą na Pregole odbyć spacer w ten sposób, by przejść kolejno przez wszystkie mosty, nie przechodząc po żadnym z nich więcej niż jeden raz?

Odpowiedź jest negatywna.

Definicja grafu nieskierowanego

Graf (graf nieskierowany, graf niezorientowany) $G = (V, E)$ składa się z niepustego, skończonego zbioru *wierzchołków* (ang. *vertices*, *nodes*) $V(G)$ i skończonego zbioru

$$E(G) \subseteq \{\{v_i, v_j\} : i \neq j, v_i, v_j \in V\} \cup \{\{v_i\} : v_i \in V\}.$$

Definicja grafu nieskierowanego

Graf (graf nieskierowany, graf niezorientowany) $G = (V, E)$ składa się z niepustego, skończonego zbioru *wierzchołków* (ang. *vertices, nodes*) $V(G)$ i skończonego zbioru

$$E(G) \subseteq \{\{v_i, v_j\} : i \neq j, v_i, v_j \in V\} \cup \{\{v_i\} : v_i \in V\}.$$

Zbiory dwuelementowe nazywamy *krawędziami* (ang. *edges, lines*), a jednoelementowe *pętlami* (ang. *loops*). Wierzchołki u oraz v nazywamy końcami krawędzi $\{u, v\} \in E$.

Wierzchołki i krawędzie

Powtarzające się krawędzie lub pętle (gdy E jest multizbiorem) nazywamy wielokrotnymi lub równoległymi.

Wierzchołki i krawędzie

Powtarzające się krawędzie lub pętle (gdy E jest multizbiorem) nazywamy wielokrotnymi lub równoległymi.

Graf bez krawędzi wielokrotnych i pętli nazywamy *grafem prostym*.

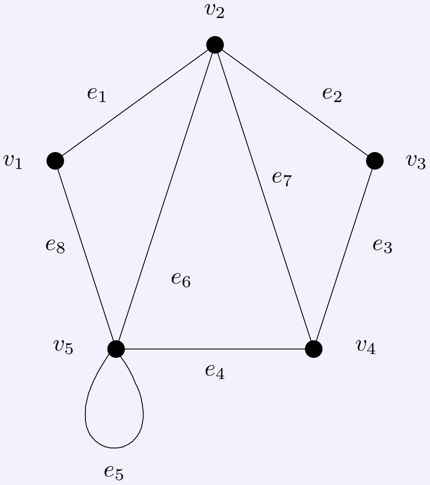
Wierzchołki i krawędzie

Powtarzające się krawędzie lub pętle (gdy E jest multizbiorem) nazywamy wielokrotnymi lub równoległymi.

Graf bez krawędzi wielokrotnych i pętli nazywamy *grafem prostym*.

Graf, który ma wielokrotne krawędzie lub pętle, nazywamy *multigrafem*.

Graf nieskierowany



Przykład.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},\ E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

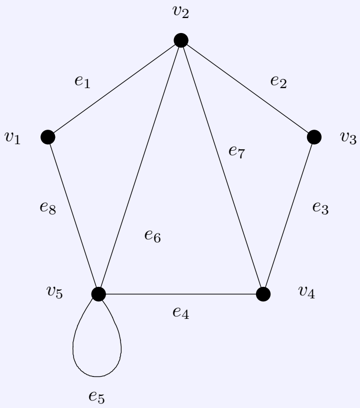
Droga

Droga w grafie to naprzemienny zbiór wierzchołków i krawędzi $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_n, e_n)$.

Droga prosta (ang. *path*) to droga, w której nie powtarzają się żadne elementy (wszystkie wierzchołki są różne).

Jeżeli graf jest prosty, to droga jest jednoznacznie zdefiniowana przez ciąg wierzchołków lub ciąg krawędzi.

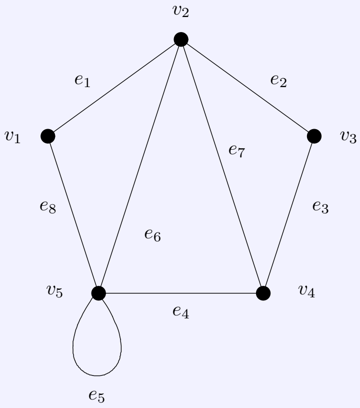
Droga – przykład



Droga:

$$(v_2, v_1, v_5, v_4, v_3, v_4) \text{ lub } (e_1, e_8, e_4, e_3, e_3).$$

Droga prosta – przykład



Droga prosta (ang. *path*) to droga, w której nie powtarzają się żadne elementy (wszystkie wierzchołki są różne).

$$(v_2, v_1, v_5, v_4, v_3) \text{ lub } (e_1, e_8, e_4, e_3)\,.$$

Drogę prostą o n wierzchołkach oznaczymy przez P_n.

Cykle

Cykl (ang. *cycle, circut*) to droga, w której $v_0 = v_n$.

Cykle

Cykl (ang. *cycle, circut*) to droga, w której $v_0 = v_n$.

Cykl prosty to cykl, w którym nie powtarzają się żadne elementy (wszystkie wierzchołki są różne). Cykl prosty o n wierzchołkach oznaczymy przez C_n.

Cykle

Cykl (ang. *cycle, circut*) to droga, w której $v_0 = v_n$.

Cykl prosty to cykl, w którym nie powtarzają się żadne elementy (wszystkie wierzchołki są różne). Cykl prosty o n wierzchołkach oznaczymy przez C_n.

Liczbę krawędzi w drodze prostej lub w cyklu prostym nazywa się długością drogi lub cyklu.

Cykle

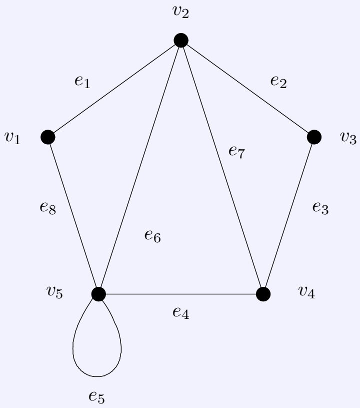
Cykl (ang. *cycle, circut*) to droga, w której $v_0 = v_n$.

Cykl prosty to cykl, w którym nie powtarzają się żadne elementy (wszystkie wierzchołki są różne). Cykl prosty o n wierzchołkach oznaczymy przez C_n.

Liczbę krawędzi w drodze prostej lub w cyklu prostym nazywa się długością drogi lub cyklu.

Obwodem (ang. *girth*) w grafie nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie. Graf, który nie zawiera cykli, nazywa się *grafem acyklicznym*.

Cykl – przykład

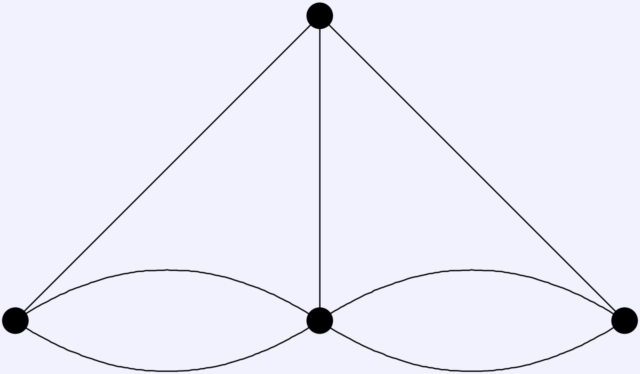


Cykle proste:

$$(e_6, e_4, e_7), (e_1, e_8, e_4, r_3), (e_5).$$

Mosty królewiecki – powrót

Mosty królewieckie



Grafy spójne

Graf, w którym istnieje droga z każdego wierzchołka do każdego innego, nazywa się *grafem spójnym* (ang. *connected graph*).

Grafy spójne

Graf, w którym istnieje droga z każdego wierzchołka do każdego innego, nazywa się *grafem spójnym* (ang. *connected graph*).

Graf, w którym dowolne dwa wierzchołki należą do pewnego cyklu prostego, nazywa się *grafem silnie spójnym*.

Grafy spójne

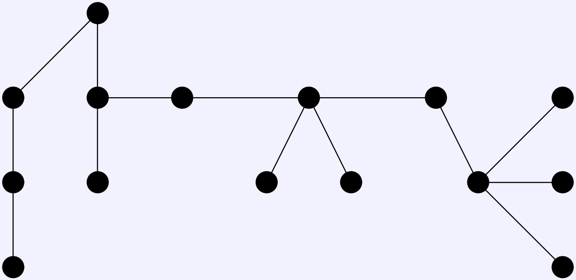
Graf, w którym istnieje droga z każdego wierzchołka do każdego innego, nazywa się *grafem spójnym* (ang. *connected graph*).

Graf, w którym dowolne dwa wierzchołki należą do pewnego cyklu prostego, nazywa się *grafem silnie spójnym*.

Twierdzenie

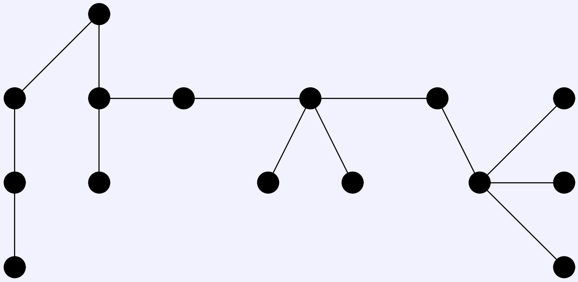
Każdy graf silnie spójny jest spójny.

Drzewa



Graf acykliczny i spójny nazywa się drzewem (ang. *tree*). Wierzchołek drzewa, który jest końcem tylko jednej krawędzi, nazywa się liściem.

Drzewa

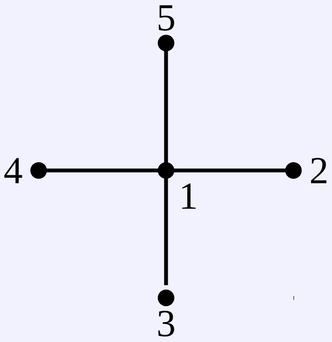


Graf acykliczny i spójny nazywa się drzewem (ang. *tree*). Wierzchołek drzewa, który jest końcem tylko jednej krawędzi, nazywa się liściem.

Korzeń drzewa to dowolny wyróżniony jego wierzchołek. Długość najdłuższej drogi od korzenia do liścia to *wysokość drzewa*.

Gwiazda

Drzewo o n wierzchołkach i wysokości 1, czyli składające się tylko z korzenia i z $n-1$ liści, nazwiemy *gwiazdą* i oznaczymy przez S_n.



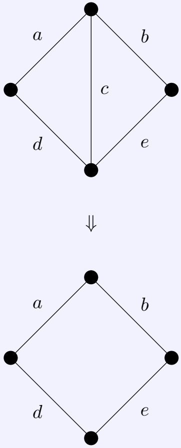
1 – korzeń
2 . . . 5 – liście

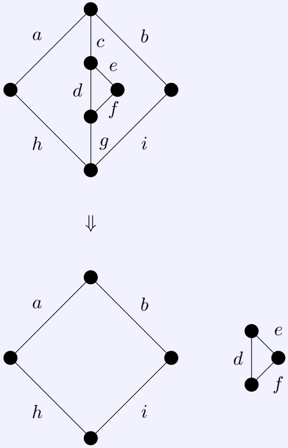
Dwa cykle

Twierdzenie

Różnica symetryczna dwóch cykli jest cyklem lub sumą cykli rozłącznych krawędziowo.

Przykład





acd bce *acdgh bcefgi*

Sąsiedztwo

Dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ i krawędzi $e = \{v_i, v_j\} \in E$ mówimy, że wierzchołki v_i, v_j są *incydentne* z krawędzią e. Wierzchołki v_i, v_j są końcami krawędzi e, to znaczy $v_i \in e$, $v_j \in e$.

Sąsiedztwo

Dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ i krawędzi $e = \{v_i, v_j\} \in E$ mówimy, że wierzchołki v_i, v_j są *incydentne* z krawędzią e. Wierzchołki v_i, v_j są końcami krawędzi e, to znaczy $v_i \in e$, $v_j \in e$.

Wierzchołki incydentne z daną krawędzią nazywamy *sąsiednimi* (ang. *adjacent*).
Dwa wierzchołki grafu G są sąsiednie, jeśli istnieje krawędź, która je łączy.

Sąsiedztwo

Dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ i krawędzi $e = \{v_i, v_j\} \in E$ mówimy, że wierzchołki v_i, v_j są *incydentne* z krawędzią e. Wierzchołki v_i, v_j są końcami krawędzi e, to znaczy $v_i \in e$, $v_j \in e$.

Wierzchołki incydentne z daną krawędzią nazywamy *sąsiednimi* (ang. *adjacent*).
Dwa wierzchołki grafu G są sąsiednie, jeśli istnieje krawędź, która je łączy.

Dwie krawędzie są sąsiednie (incydentne), jeśli mają wspólny wierzchołek, a także wierzchołek jest incydentny z krawędzią, gdy jest jej końcem.

Stopnie wierzchołków

Niech $\Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E, v \neq u\}$ będzie zbiorem wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v.

Stopnie wierzchołków

Niech $\Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E, v \neq u\}$ będzie zbiorem wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v.

Dla grafu prostego $d(v) = |\Gamma(v)|$ jest stopniem wierzchołka v.

Stopnie wierzchołków

Niech $\Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E, v \neq u\}$ będzie zbiorem wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v.

Dla grafu prostego $d(v) = |\Gamma(v)|$ jest stopniem wierzchołka v.

Stopień wierzchołka v multigrafu G jest liczbą krawędzi incydentnych z v.

Stopnie wierzchołków

Niech $\Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E, v \neq u\}$ będzie zbiorem wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v.

Dla grafu prostego $d(v) = |\Gamma(v)|$ jest stopniem wierzchołka v.

Stopień wierzchołka v multigrafu G jest liczbą krawędzi incydentnych z v.

Wierzchołek izolowany to wierzchołek stopnia 0.

Stopnie wierzchołków

Niech $\Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E, v \neq u\}$ będzie zbiorem wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v.

Dla grafu prostego $d(v) = |\Gamma(v)|$ jest stopniem wierzchołka v.

Stopień wierzchołka v multigrafu G jest liczbą krawędzi incydentnych z v.

Wierzchołek izolowany to wierzchołek stopnia 0.

Wierzchołek końcowy lub *liść* (ang. *leaf*) to wierzchołek stopnia 1.

Stopnie wierzchołków

Niech $\Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E, v \neq u\}$ będzie zbiorem wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v.

Dla grafu prostego $d(v) = |\Gamma(v)|$ jest stopniem wierzchołka v.

Stopień wierzchołka v multigrafu G jest liczbą krawędzi incydentnych z v.

Wierzchołek izolowany to wierzchołek stopnia 0.

Wierzchołek końcowy lub *liść* (ang. *leaf*) to wierzchołek stopnia 1.

Pętla w wierzchołku v powiększa stopień tego wierzchołka o 2.

Lemat

Lemat o uściskach dłoni (Euler, 1736 r.):

Lemat

W każdym grafie nieskierowanym suma stopni wszystkich wierzchołków jest liczbą parzystą i jest równa podwojonej liczbie krawędzi

Natychmiastowym wnioskiem z lematu o uściskach dłoni jest twierdzenie, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta.

Definicja grafu skierowanego

Graf skierowany – czyli *zorientowany*, zwany też digrafem (ang. *digraph* = *directed graph*) – $G = (V, E)$ składa się ze zbioru wierzchołków V i zbioru par wierzchołków E.

Definicja grafu skierowanego

Graf skierowany – czyli *zorientowany*, zwany też digrafem (ang. *digraph* = *directed graph*) – $G = (V, E)$ składa się ze zbioru wierzchołków V i zbioru par wierzchołków E.

Pary postaci (u, v), gdzie $u \neq v$, nazywamy *łukami* (ang. *arcs*), a pary postaci (u, u) – *pętlami* (ang. *loops*).

Definicja grafu skierowanego

Graf skierowany – czyli *zorientowany*, zwany też digrafem (ang. *digraph* = *directed graph*) – $G = (V, E)$ składa się ze zbioru wierzchołków V i zbioru par wierzchołków E.

Pary postaci (u, v), gdzie $u \neq v$, nazywamy *łukami* (ang. *arcs*), a pary postaci (u, u) – *pętlami* (ang. *loops*).

Digraf bez łuków wielokrotnych i pętli nazywamy *digrafem prostym*.

Definicja grafu skierowanego

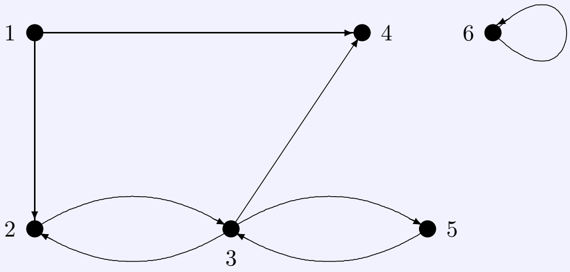
Graf skierowany – czyli *zorientowany*, zwany też digrafem (ang. *digraph* = *directed graph*) – $G = (V, E)$ składa się ze zbioru wierzchołków V i zbioru par wierzchołków E.

Pary postaci (u, v), gdzie $u \neq v$, nazywamy *łukami* (ang. *arcs*), a pary postaci (u, u) – *pętlami* (ang. *loops*).

Digraf bez łuków wielokrotnych i pętli nazywamy *digrafem prostym*.

Digraf, który ma wielokrotne łuki lub pętle, nazywamy *multigrafem skierowanym*.

Graf skierowany



$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 3), (6, 6)\}$

Stopnie wierzchołków

Dla digrafu $G = (V, E)$ i jego łuku $e = (u, v) \in E$ mówimy, że wierzchołki u, v są incydentne z łukiem e, przy czym u jest początkiem, a v – końcem łuku e.

Stopnie wierzchołków

Dla digrafu $G = (V, E)$ i jego łuku $e = (u, v) \in E$ mówimy, że wierzchołki u, v są incydentne z łukiem e, przy czym u jest początkiem, a v – końcem łuku e.

$V^+(u) = \{v \in V : (u, v) \in E\}$ – zbiór końców łuków wychodzących z wierzchołka u,

$V^-(u) = \{v \in V : (v, u) \in E\}$ – zbiór początków łuków wchodzących do wierzchołka u,

$|V^+(u)| = d^+(u)$ – *stopień wyjściowy* (ang. *outdegree*) wierzchołka u,

Stopnie wierzchołków

Dla digrafu $G = (V, E)$ i jego łuku $e = (u, v) \in E$ mówimy, że wierzchołki u, v są incydentne z łukiem e, przy czym u jest początkiem, a v – końcem łuku e.

$V^+(u) = \{v \in V : (u, v) \in E\}$ – zbiór końców łuków wychodzących z wierzchołka u,

$V^-(u) = \{v \in V : (v, u) \in E\}$ – zbiór początków łuków wchodzących do wierzchołka u,

$|V^+(u)| = d^+(u)$ – *stopień wyjściowy* (ang. *outdegree*) wierzchołka u,

$|V^-(u)| = d^-(u)$ – *stopień wejściowy* (ang. *indegree*) wierzchołka u,

$d^+(u) + d^-(u) = d(u)$ – stopień wierzchołka u.

Stopnie – własności

Twierdzenie

Dla grafu nieskierowanego zachodzi:

$$\sum_{i \in V} d\left(i\right) = 2|E|.$$

Dla grafu skierowanego zachodzi:

$$\sum_{i \in V} d^{-}\left(i\right) = \sum_{i \in V} d^{+}\left(i\right) = |E|.$$

Podgrafy

Podgrafem (ang. *subgraph*) grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolny graf $G' = (V', E')$, dla którego $V' \subseteq V$ oraz $E' \subseteq E$.
Z definicji grafu wynika, że E' zawiera tylko takie krawędzie (łuki), które zawierają wierzchołki należące do V'.
Maksymalny podgraf spójny nazywamy *składową spójną* (ang. *connected component*).
W grafie skierowanym maksymalny podgraf silnie spójny nazywamy *składową silnie spójną*.

Składowe spójne

Maksymalny podgraf spójny nazywamy *składową spójną* (ang. *connected component*).
W grafie skierowanym maksymalny podgraf silnie spójny nazywamy *składową silnie spójną*.
Uwaga. Maksymalny podgraf spójny to taki, że nie jest podgrafem żadnego innego większego spójnego podgrafu.

Własność

Podgraf (V', E') *jest składową spójną, gdy jest spójny i nie istnieją krawędzie* $e \in E$ *takie, że* $e \cap V' \neq \emptyset$ *oraz* $e \cap (V \setminus V') \neq \emptyset$.

Odległość

Odległością wierzchołków $u, v \in V$ w grafie (V, E) jest długość najkrótszej drogi łączącej wierzchołki u i v.
Odległość ta jest oznaczana jako $d(u, v)$.
$d(u, v)$ jest metryką w zbiorze V, czyli

1. $d(u, v) \geq 0$,
2. $d(u, v) = 0 \iff u = v$,
3. $d(u, v) = d(v, u)$,
4. $d(u, w) + d(w, v) \geq d(u, v)$.

Odległość

Odległością wierzchołków $u, v \in V$ w grafie (V, E) jest długość najkrótszej drogi łączącej wierzchołki u i v.
Odległość ta jest oznaczana jako $d(u, v)$.
$d(u, v)$ jest metryką w zbiorze V, czyli

1. $d(u, v) \geq 0$,
2. $d(u, v) = 0 \iff u = v$,
3. $d(u, v) = d(v, u)$,
4. $d(u, w) + d(w, v) \geq d(u, v)$.

Własność 4 to *nierówność trójkąta.*

Wstęp

Reprezentowanie grafów jako macierzy jest uznawane za nie najlepszy sposób ich przedstawiania w postaci programów komputerowych.
Wygodniejsze jest przedstawianie grafów w postaci list.

Wstęp

Reprezentowanie grafów jako macierzy jest uznawane za nie najlepszy sposób ich przedstawiania w postaci programów komputerowych.
Wygodniejsze jest przedstawianie grafów w postaci list.

Powody reprezentowania w postaci macierzy:

- elegancja przedstawienia grafu i naturalna możliwość uogólnienia.
- możliwość łatwego programowania grafów, zwłaszcza niedużych, w tych językach (pakietach, środowiskach), w których macierze są podstawową strukturą danych.

Macierz incydencji grafu nieskierowanego

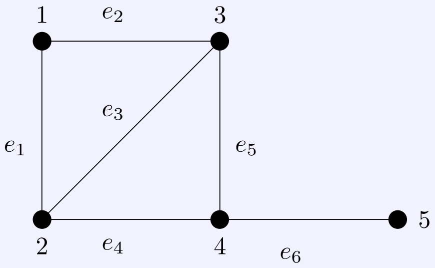
$G = (V, E)$ graf nieskierowany:
$V = \{1, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq \{\{i, j\} : i, j \in V\}$

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ & \ldots\ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

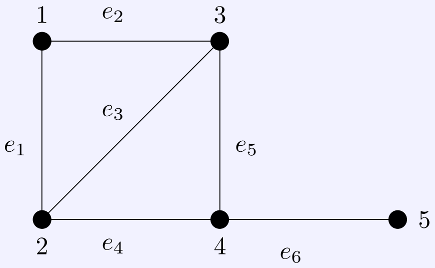
gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i \in e_j\,, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przykład



Przykład



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\begin{aligned} E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \\ &= \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}\,. \end{aligned}$$

Przykład c.d.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\begin{aligned} E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \\ &= \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}\,. \end{aligned}$$

Przykład c.d.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\begin{aligned} E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \\ &= \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}. \end{aligned}$$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz incydencji – własności

- Macierz incydencji składa się tylko z elementów 0 oraz 1 – jest macierzą binarną.
- Krawędź grafu jest incydentna z dokładnie dwoma wierzchołkami – każda kolumna macierzy ma dokładnie dwie jedynki.
- Wiersz, w którym wszystkie elementy są zerami, reprezentuje wierzchołek izolowany.
- Krawędzie równoległe mają identyczne kolumny.
- Liczba jedynek w każdym wierszu jest równa stopniowi odpowiadającego mu wierzchołka.

Macierz incydencji grafu skierowanego

$G = (V, E)$ graf skierowany bez pętli: $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq V \times V$

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ & \ldots\ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{gdy } e_j = (k, i), \\ 1, & \text{gdy } e_j = (i, k), \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Macierz incydencji grafu skierowanego

$G = (V, E)$ graf skierowany bez pętli: $V = \{1, 2, \ldots, n\}$,
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq V \times V$

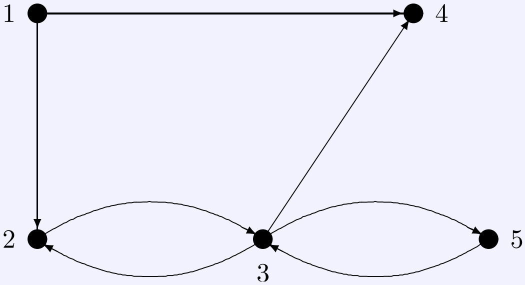
$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{gdy } e_j = (k, i), \\ 1, & \text{gdy } e_j = (i, k), \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$a_{ij} = 1$, gdy wierzchołek i jest początkiem łuku e_j oraz $a_{ij} = -1$, gdy i jest końcem łuku e_j.

Macierz incydencji grafu skierowanego – przykład



Łuki e_i:

i	łuk
1	(1,2)
2	(1,4)
3	(2,3)
4	(3,2)
5	(3,4)
6	(3,5)
7	(5,3)

Macierz incydencji grafu skierowanego – przykład c.d.

Łuki e_i:

i	łuk
1	(1,2)
2	(1,4)
3	(2,3)
4	(3,2)
5	(3,4)
6	(3,5)
7	(5,3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego

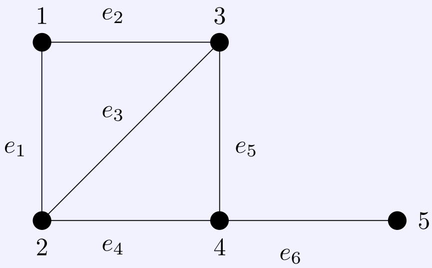
Graf $G = (V, E)$:
$V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq \{\{i, j\} : i, j \in V\}$.

$$B(G) = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ & \ldots\ldots & \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie:

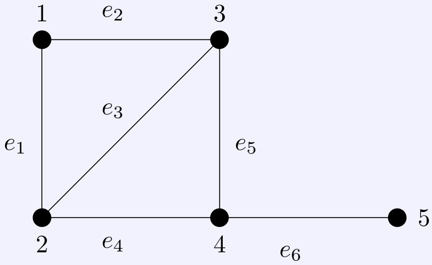
$$b_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Macierz sąsiedztwa – przykład



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz stopni – przykład



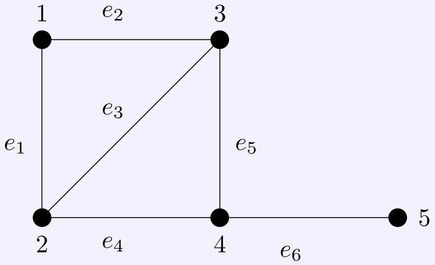
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Liczba dróg

Twierdzenie

Jeżeli B jest macierzą sąsiedztwa grafu nieskierowanego G, to element $b_{ij}^{(k)}$ macierzy B^k jest równy liczbie dróg (niekoniecznie prostych) mających k krawędzi między wierzchołkami i oraz j.

Liczba dróg – przykład



$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze incydencji i sąsiedztwa

Własność

Niech G będzie grafem nieskierowanym prostym oraz niech $D(G)$ będzie macierzą stopni:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j, \\ d(i) & \text{dla } i = j, \end{cases}$$

gdzie $d(i)$ jest stopniem wierzchołka o numerze i. Wtedy:

$$A(G)\,A^T(G) = B(G) + D(G).$$

Macierze incydencji i sąsiedztwa – przykład

$$A \cdot A^T = B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$