Matematyka Dyskretna

Wykład 6

Kombinacje i podziały

Wojciech Kordecki
wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Współczynnik dwumianowy

Liczba podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego oznaczana jest symbolem $\binom{n}{k}$, zwanym *symbolem Newtona* lub *współczynnikiem dwumianowym*.
Podzbiory takie nazywa się również *kombinacjami k-wyrazowymi ze zbioru n-elementowego bez powtórzeń*.
Zamiast symbolu $\binom{n}{k}$ używany jest też symbol C_n^k. Dla $k > n$ mamy oczywiście $\binom{n}{k} = 0$ oraz $\binom{0}{0} = 1$.

Twierdzenie

Liczba podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego jest równa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i}.$$

Wzór dwumianowy

Symbol $\binom{n}{k}$ występuje w tak zwanym wzorze dwumianowym podanym przez I. Newtona w 1676 roku:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,.$$

Przyjmując $x-1$ w miejsce x oraz $y=1$ we wzorze dostajemy:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k\,.$$

Własności

Podstawiając $x = 2$, otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

Równość ta mówi, że dowolny n-elementowy zbiór ma dokładnie 2^n podzbiorów.
Różniczkując ten wzór stronami i przyjmując $x = 2$, otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1} .$$

Oczywista jest własność

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ze wzoru na współczynnik dwumianowy wynika, że:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$
$$= \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 1} > \cdots > \binom{n}{n}$$

dla $n > 1$.

Ze wzoru na współczynnik dwumianowy wynika, że:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$
$$= \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 1} > \cdots > \binom{n}{n}$$

dla $n > 1$.

Trzeba zauważyć, że dla parzystego n mamy $\lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$.

Trójkąt Pascala – przypomnienie

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dla $n > 0$ i $k > 0$.
Stąd:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & &
\end{array}$$

Trójkąt Pascala – dowód

Zbiór $(n-1)$-elementowy	el. n-ty
Podzbiory k-elementowe: $\binom{n-1}{k}$	–
$+$	
Podzbiory $(k-1)$-elementowe: $\binom{n-1}{k-1}$	•

Trójkąt Pascala – dowód

Zbiór $(n-1)$-elementowy	el. n-ty
Podzbiory k-elementowe: $\binom{n-1}{k}$	–
+	
Podzbiory $(k-1)$-elementowe: $\binom{n-1}{k-1}$	•

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Trójkąt Pascala i liczby Fibonacciego

Liczby Fibonacciego f_n są sumami liczb z „przekątnych” w trójkącie Pascala. „Przekątne” w trójkącie Pascala to elementy postaci $\binom{n-k}{k-1}$ dla $k = 1, \ldots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$:

$$f_n = \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n-k}{k-1}.$$

	1						
1	1	1					
1	1	2	1				
2	1	3	3	1			
3	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
8	1	6	15	20	15	6	1
13							

Tożsamość Cauchy'ego

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb naturalnych k, l, r:

$$\binom{l+r}{k} = \sum_{t=0}^{k} \binom{l}{t}\binom{r}{k-t}.$$

Tożsamość Cauchy'ego

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb naturalnych k, l, r:

$$\binom{l+r}{k} = \sum_{t=0}^{k} \binom{l}{t} \binom{r}{k-t}.$$

Dowód

Zbiór n-elementowy, $n = l + r$ jest podzielony na część r-elementową i l-elementową. W części r-elementowej jest t elementów, a w l-elementowej reszta, czyli $k - t$ elementów. Sumując wszystkie możliwości, dostajemy dowodzony wzór.

Uogólnienie symbolu Newtona

Liczba sposobów rozmieszczenia $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ obiektów w n pudełkach z a_1 obiektami w pierwszym pudełku, a_2 w drugim oraz a_n w n-tym jest nazywana *współczynnikiem wielomianowym*.

Uogólnienie symbolu Newtona

Liczba sposobów rozmieszczenia $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ obiektów w n pudełkach z a_1 obiektami w pierwszym pudełku, a_2 w drugim oraz a_n w n-tym jest nazywana *współczynnikiem wielomianowym*.

Współczynniki wielomianowe wyrażane są wzorem:

$$\binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1, a_2, \ldots, a_n} = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)!}{a_1! a_2! \ldots a_n!}.$$

Jeśli którakolwiek z liczb a_i jest ujemna, to współczynnik ten jest zerem.

Uogólnienie symbolu Newtona

Liczba sposobów rozmieszczenia $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ obiektów w n pudełkach z a_1 obiektami w pierwszym pudełku, a_2 w drugim oraz a_n w n-tym jest nazywana *współczynnikiem wielomianowym*.

Współczynniki wielomianowe wyrażane są wzorem:

$$\binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1, a_2, \ldots, a_n} = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)!}{a_1! a_2! \ldots a_n!}.$$

Jeśli którakolwiek z liczb a_i jest ujemna, to współczynnik ten jest zerem.
Nazwa:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_n \\ 0 \leq a_i \leq n}} \binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1, a_2, \ldots, a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_n}.$$

Definicja

Uogólnieniem pojęcia zbioru jest zbiór z powtórzeniami (multizbiór).
W multizbiorze każdy element może wystąpić kilkakrotnie, a liczba wystąpień nazywa się krotnością elementu.
Istotna jest tu tylko krotność elementu, a nieistotna jest kolejność wystąpień. Zbiór taki oznacza się, albo wypisując element tyle razy, ile wynosi jego krotność, albo dla krotności równej k elementu a, pisząc $\{\ldots, k * a, \ldots\}$.

Definicja

Uogólnieniem pojęcia zbioru jest zbiór z powtórzeniami (multizbiór).
W multizbiorze każdy element może wystąpić kilkakrotnie, a liczba wystąpień nazywa się krotnością elementu.
Istotna jest tu tylko krotność elementu, a nieistotna jest kolejność wystąpień. Zbiór taki oznacza się, albo wypisując element tyle razy, ile wynosi jego krotność, albo dla krotności równej k elementu a, pisząc $\{\ldots, k * a, \ldots\}$.

Przykład. Jeśli $X = \{2 * a, 3 * b, 1 * c\}$, to również $X = \{a, b, a, b, c, b\} = \{a, a, b, b, b, c\}$, ale $X \neq \{a, b, c\}$.

Podzbiór multizbioru

Zbiór A jest podzbiorem zbioru B, $A \subseteq B$, gdy krotność każdego elementu w A jest nie większa od krotności tego samego elementu w B.
Liczbę elementów k w zbiorze $X = \{k_1 * x_1, \ldots, k_n * x_n\}$, to znaczy liczność zbioru X, definiuje się jako $k = k_1 + \cdots + k_n$.

Podzbiór multizbioru

Zbiór A jest podzbiorem zbioru B, $A \subseteq B$, gdy krotność każdego elementu w A jest nie większa od krotności tego samego elementu w B.
Liczbę elementów k w zbiorze $X = \{k_1 * x_1, \ldots, k_n * x_n\}$, to znaczy liczność zbioru X, definiuje się jako $k = k_1 + \cdots + k_n$.

Podzbiór zbioru z powtórzeniami jest wyznaczany przez wektor n-elementowy $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, w którym
$0 \leq m_1 \leq k_1, \ldots, 0 \leq m_n \leq k_n$.
Liczba wszystkich podzbiorów zbioru z powtórzeniami o krotnościach $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jest równa
$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1)$.

Podzbiór multizbioru – przykład

$$X = \{a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, d\} = \{3 * a, 4 * b, 3 * c, d\}.$$

Podzbiór multizbioru – przykład

$$X = \{a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, d\} = \{3 * a, 4 * b, 3 * c, d\} .$$

Podzbiory zbioru X:

$$\begin{aligned} A &= \{a, 4 * b, 2 * c, d\} \\ B &= \{2 * a, 3 * b, 3 * c\} \\ C &= \{2 * a, c, d\} \\ D &= \{a, b, c, d\} \end{aligned}$$

Liczba podzbiorów

Twierdzenie

Liczba k-elementowych zbiorów z powtórzeniami o elementach ze zbioru n-elementowego (bez powtórzeń) jest równa:

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Liczba podzbiorów

Twierdzenie

Liczba k-elementowych zbiorów z powtórzeniami o elementach ze zbioru n-elementowego (bez powtórzeń) jest równa:

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Przykład. Niech $A = \{a, b, c\}$, czyli $n = 3$, oraz niech $k = 2$. Zgodnie ze wzorem, z elementów zbioru A można utworzyć:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4}{2} = 6$$

dwuelementowych podzbiorów z powtórzeniami:

$$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{c, c\}.$$

Podziały zbioru

Podziałem zbioru n-elementowego X na k bloków $B_i \subseteq X$, gdzie $i = 1, \ldots, k$, nazywamy dowolną rodzinę zbiorów $\pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ taką, że $B_1 \cup B_2, \cup \ldots \cup B_k = X$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $1 \leq i \leq j \leq k$ oraz $B_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq k$.

Podziały zbioru

Podziałem zbioru n-elementowego X na k bloków $B_i \subseteq X$, gdzie $i = 1, \ldots, k$, nazywamy dowolną rodzinę zbiorów $\pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ taką, że $B_1 \cup B_2, \cup \ldots \cup B_k = X$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $1 \leq i \leq j \leq k$ oraz $B_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq k$.

Oznaczenia:

- $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – bloki podziału zbioru X,
- $\Pi_k(X)$ – zbiór wszystkich podziałów zbioru X na k bloków,
- $\Pi(X) = \Pi_1(X) \cup \cdots \cup \Pi_n(X)$ – zbiór wszystkich podziałów zbioru X.

Przykład

Istnieje 6 podziałów zbioru czteroelementowego $X = \{a, b, c, d\}$ na 3 bloki:

$$
\begin{aligned}
\Pi_3(X) = \{ & \\
& \pi_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}, \\
& \pi_2 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}, \\
& \pi_3 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, \\
& \pi_4 = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}, \\
& \pi_5 = \{\{a\}, \{b, d\}, \{c\}\}, \\
& \pi_6 = \{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\} \\
& \}.
\end{aligned}
$$

$\Pi_3(X) = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$, $|\Pi_3(X)| = 6$.

Rozdrobnienie podziału

Podział π jest *rozdrobnieniem* podziału σ, jeśli każdy blok B podziału σ jest sumą mnogościową pewnej liczby bloków podziału π, co zapisujemy w postaci: $\pi \leq \sigma$.

Rozdrobnienie podziału

Podział π jest *rozdrobnieniem* podziału σ, jeśli każdy blok B podziału σ jest sumą mnogościową pewnej liczby bloków podziału π, co zapisujemy w postaci: $\pi \leq \sigma$.

Relacja ta jest relacją porządku na zbiorze $\Pi(X)$.

Rozdrobnienie podziału

Podział π jest *rozdrobnieniem* podziału σ, jeśli każdy blok B podziału σ jest sumą mnogościową pewnej liczby bloków podziału π, co zapisujemy w postaci: $\pi \leq \sigma$.

Relacja ta jest relacją porządku na zbiorze $\Pi(X)$.

Przykład. Pomiędzy podziałami zbioru $X = \{a, b, c, d, e\}$ zachodzi relacja:

$$\{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}, \{e\}\} \leq \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}.$$

Definicja zasady szufladkowej Dirichleta

Zasada szufladkowa Dirichleta w sformułowaniu potocznym głosi, że jeżeli chcemy rozmieścić $n + 1$ przedmiotów w n szufladkach, to co najmniej jedna szufladka będzie zawierać więcej niż jeden przedmiot.

Definicja zasady szufladkowej Dirichleta

Zasada szufladkowa Dirichleta w sformułowaniu potocznym głosi, że jeżeli chcemy rozmieścić $n+1$ przedmiotów w n szufladkach, to co najmniej jedna szufladka będzie zawierać więcej niż jeden przedmiot.

Terminologia polska nie jest jednolita.

Zasadę szufladkową nazywa się też zasadą pudełkową lub zasadą gniazd gołębich (ang. *pigeonhole principle*), mówi się tam bowiem o rozmieszczeniu n gołębi w k gniazdach.

Zasada szufladkowa Dirichleta – twierdzenie

Twierdzenie

Niech dany będzie zbiór skończony X mający n elementów. Przypuśćmy, że jest on sumą k zbiorów parami rozłącznych:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$$

oraz $n > k$. Wówczas któryś ze zbiorów X_i ma co najmniej dwa elementy.

Uściski dłoni

Pewna grupa n osób wita się, podając sobie ręce, przy czym nikt nie wita się sam ze sobą i żadna para osób nie wita się więcej niż jeden raz. Czy jest możliwe, aby każda z tych osób ściskała inną liczbę dłoni?

Uściski dłoni

Pewna grupa n osób wita się, podając sobie ręce, przy czym nikt nie wita się sam ze sobą i żadna para osób nie wita się więcej niż jeden raz. Czy jest możliwe, aby każda z tych osób ściskała inną liczbę dłoni?

Mogłoby się wydawać, że jest to możliwe, ponieważ liczba możliwych uścisków jednej osoby może przybierać dowolną spośród wartości od 0 do $n-1$, których jest przecież n.
Zauważmy jednak, że skrajne przypadki 0 i $n-1$ wykluczają się wzajemnie (nie jest możliwe, by któraś z osób nie uścisnęła żadnej dłoni i jednocześnie ktoś inny przywitał się ze wszystkimi).
Zatem na mocy zasady szufladkowej muszą istnieć dwie osoby, które wymieniły tę samą liczbę uścisków.

Uogólniona zasada szufladkowa

Twierdzenie

Jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach oraz $n > km$, gdzie m jest pewną liczbą naturalną, to w którejś szufladce znajdzie się więcej niż m przedmiotów.

Uogólniona zasada szufladkowa

Twierdzenie

Jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach oraz $n > km$, gdzie m jest pewną liczbą naturalną, to w którejś szufladce znajdzie się więcej niż m przedmiotów.

Przykład. Na konferencję przyjechało 100 matematyków, z których 85 władało językiem angielskim, 80 – francuskim, 70 – polskim, 66 – niemieckim. Czy wśród matematyków był taki, który władał wszystkimi czterema językami?

Uogólniona zasada szufladkowa

Twierdzenie

Jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach oraz $n > km$, gdzie m jest pewną liczbą naturalną, to w którejś szufladce znajdzie się więcej niż m przedmiotów.

Przykład. Na konferencję przyjechało 100 matematyków, z których 85 władało językiem angielskim, 80 – francuskim, 70 – polskim, 66 – niemieckim. Czy wśród matematyków był taki, który władał wszystkimi czterema językami?

Łączna liczba języków, którymi władali uczestnicy konferencji, wynosi $85 + 80 + 70 + 66 = 301$. Wobec tego, na mocy zasady szufladkowej, co najmniej jeden z nich zna 4 języki. Gdyby każdy władał co najwyżej trzema językami, to ogółem znaliby oni co najwyżej 300 języków.

Podział zbioru

Podział π n-elementowego zbioru X jest typu $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, jeśli zawiera λ_i bloków i-elementowych. Typ taki zapisujemy jako $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$.

Podział zbioru

Podział π n-elementowego zbioru X jest typu $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, jeśli zawiera λ_i bloków i-elementowych. Typ taki zapisujemy jako $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$.

Twierdzenie

Liczba podziałów typu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$ zbioru n-elementowego, gdzie $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$, jest równa:

$$P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \ldots (n!)^{\lambda_n}}.$$

Liczba Stirlinga

Liczba takich podziałów jest równa liczbie permutacji typu $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n}$ zbioru n-elementowego.

Liczba pogrupowań n różnych obiektów w dokładnie k grupach to podzbiorowa liczba Stirlinga nazywana liczbą Stirlinga drugiego rodzaju.

Określa ona liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów. Oznaczana jest jako $\left\{ n \atop k \right\}$ lub $S\left(n,k\right)$.

Przykład

Istnieje siedem sposobów podziału zbioru czteroelementowego na dwie części:

$\{1,2,3\} \cup \{4\}$, $\{1,2,4\} \cup \{3\}$, $\{1,3,4\} \cup \{2\}$, $\{2,3,4\} \cup \{1\}$, $\{1,2\} \cup \{3,4\}$, $\{1,3\} \cup \{2,4\}$, $\{1,4\} \cup \{2,3\}$. Stąd $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

Jawnie

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju można też wyrazić jawnie.

Twierdzenie

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^k.$$

Rekurencyjnie

Twierdzenie

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju spełniają wzór rekurencyjny:

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

dla $0 < k < n$ *oraz* $\left\{ n \atop n \right\} = 1$ *dla* $n \geq 0$ *i* $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$ *dla* $n > 0$.

Przykład

Wyznaczymy liczbę podziałów zbioru czteroelementowego na trzy części. Obliczymy rekurencyjnie $\left\{ {4 \atop 3} \right\}$.

$$\begin{aligned}
\left\{ {4 \atop 3} \right\} &= \left\{ {4-1 \atop 3-1} \right\} + 3 \cdot \left\{ {4-1 \atop 3} \right\} = \left\{ {3 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left\{ {3 \atop 3} \right\} \\
&= \left\{ {3-1 \atop 2-1} \right\} + 2 \cdot \left\{ {3-1 \atop 2} \right\} + 3 \cdot 1 = \left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2 \cdot \left\{ {2 \atop 2} \right\} + 3 \\
&= \left\{ {2-1 \atop 1-1} \right\} + 1 \cdot \left\{ {2-1 \atop 1} \right\} + 2 \cdot 1 + 3 = \left\{ {1 \atop 0} \right\} + 1 \cdot \left\{ {1 \atop 1} \right\} + 5 \\
&= 0 + 1 \cdot 1 + 5 = 6.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że istnieje 6 podziałów zbioru czteroelementowego na trzy części.

Podział liczb

Zakładamy, że $n, k \in \{1, 2 \dots\}$. Na ile sposobów można zapisać liczbę n w postaci sumy k składników:

$$n = a_1 + \cdots + a_k ,$$

gdzie $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k > 0$? Każdy taki ciąg składników $a_1, \dots, a_k$ nazywamy *podziałem liczby* n na k składników.

Podział liczb

Zakładamy, że $n, k \in \{1, 2 \dots\}$. Na ile sposobów można zapisać liczbę n w postaci sumy k składników:

$$n = a_1 + \cdots + a_k \,,$$

gdzie $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k > 0$? Każdy taki ciąg składników $a_1, \dots, a_k$ nazywamy *podziałem liczby* n na k składników.

Oznaczenia:

- $P(n, k)$ – liczba podziałów liczby n na k składników,
- $P(n)$ – liczba wszystkich podziałów liczby n.

Przykład podziału liczby

Zbiór podziałów liczby 6:

$$
\begin{array}{llllll}
6 \\
5 & 1 \\
4 & 2 \\
4 & 1 & 1 \\
3 & 3 \\
3 & 2 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Stąd $P(6,1) = 1$, $P(6,2) = 3$, $P(6,3) = 3$, $P(6,4) = 2$, $P(6,5) = 1$, $P(6,6) = 1$, czyli $P(6) = 11$.

Diagram Ferresa

Dla podziału $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ tworzymy diagram Ferrersa. Ma on k wierszy i zawiera a_i punktów w i-tym wierszu.

Diagram Ferresa

Dla podziału $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ tworzymy diagram Ferrersa. Ma on k wierszy i zawiera a_i punktów w i-tym wierszu.

Przykład. Dla liczby 10 mamy $10 = 5 + 3 + 2$. Stąd diagram Ferrersa dla tego podziału liczby 10 ma postać:

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & & &
\end{array}$$

Podział sprzężony

Podział sprzężony otrzymujemy zamieniając miejscami (transponując) wiersze i kolumny diagramu Ferrersa.
Przykład. Diagram Ferrersa dla podziału sprzężonego liczby 10 ma postać:

$$
\begin{array}{ccc}
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \\
\bullet & & \\
\bullet & &
\end{array}
$$

Stąd podział sprzężony podziału liczby $10 = 5 + 3 + 2$ to $10 = 3 + 3 + 2 + 1 + 1$.

Podział sprzężony c.d.

Transpozycja diagrafu Ferrersa daje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między podziałami liczby n na k składników a podziałami tej liczby o największym składniku równym k.

Twierdzenie

Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie podziałów liczby n, w których największy składnik równy jest k.

Podział sprzężony c.d.

Transpozycja diagrafu Ferrersa daje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między podziałami liczby n na k składników a podziałami tej liczby o największym składniku równym k.

Twierdzenie

Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie podziałów liczby n, w których największy składnik równy jest k.

Wzór rekurencyjny:

$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$$

dla $n \geq k > 0$ oraz $P(0,0) = P(0) = 1$.

Przykład

W podziale liczby 10 na trzy składniki największy składnik może być równy 8. Odpowiedni diagram Ferrersa:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & & & & & & & \\
\bullet & & & & & & &
\end{array}
$$

Podział liczby 10 na trzy składniki – osiem podziałów:

$$
\begin{gathered}
8+1+1, \\
7+2+1, \\
6+3+1, \\
6+2+2, \\
5+4+1, \\
5+3+2, \\
4+3+3, \\
4+4+2.
\end{gathered}
$$