Matematyka Dyskretna

Wykład 3
Relacje

Wojciech Kordecki
wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański zbiorów X i Y oznacza się symbolem $X \times Y$ i określa jako zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) takich, że $x \in X$ oraz $y \in Y$, czyli

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\} .$$

Relacja $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$. Jeżeli

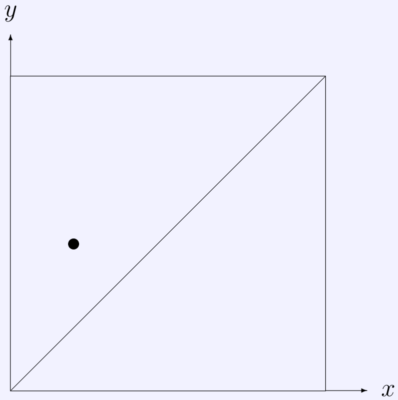
$$(x, y) \in \mathcal{R} \subseteq X \times Y,$$

to mówimy,że elementy x i y są w relacji $\mathcal{R}$ i piszemy $x\mathcal{R}y$.
Uwaga. Symbol $\mathcal{R}$ występuje tutaj jako oznaczenie zbioru: $R \subseteq X \times Y$ oraz jako operator $x\mathcal{R}y$.
Mamy tu do czynienia ze zjawiskiem *przeciążania*.

Relacja „mniejszy lub równy”

Niech $A = B = [0, 1]$ oraz niech $\mathcal{R}$ będzie relacją mniejszości $\leq$.
Wtedy

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : x \leq y\} \subset A \times B.$$



Funkcje

Niech

$$f \subset X \times Y.$$

Jeśli jest spełniony warunek

$$(x, y_1), (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2,$$

to relacja f nazywa się funkcją. Oznaczamy ją też jako $f : X \to Y$.
Zamiast pisać $(x, y) \in f$, pisze się zwykle $f(x) = y$:

Funkcje

Niech

$$f \subset X \times Y.$$

Jeśli jest spełniony warunek

$$(x, y_1), (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2,$$

to relacja f nazywa się funkcją. Oznaczamy ją też jako $f : X \to Y$.
Zamiast pisać $(x, y) \in f$, pisze się zwykle $f(x) = y$:
f jest funkcją, x – argumentem, y – wartością f w punkcie x.

Funkcje

Niech

$$f \subset X \times Y .$$

Jeśli jest spełniony warunek

$$(x, y_1), (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2 ,$$

to relacja f nazywa się funkcją. Oznaczamy ją też jako $f : X \to Y$.
Zamiast pisać $(x, y) \in f$, pisze się zwykle $f(x) = y$:
f jest funkcją, x – argumentem, y – wartością f w punkcie x.

Jeśli ponadto jest spełniony warunek

$$(x_1, y), (x_2, y) \in f \implies x_1 = x_2 ,$$

to f jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

Dziedzina i przeciwdziedzina

Dziedzina D funkcji f:

$$D = \left\{ x : \bigvee_{(x,y)} (x, y) \in f \right\}.$$

Dziedzina i przeciwdziedzina

Dziedzina D funkcji f:

$$D = \left\{ x : \bigvee_{(x,y)} (x, y) \in f \right\}.$$

Przeciwdziedzina, czyli zbiór wartości W funkcji f:

$$W = \left\{ y : \bigvee_{(x,y)} (x, y) \in f \right\}.$$

Przykład: numer rejestracyjny samochodu

Niech A będzie zbiorem samochodów zarejestrowanych w Polsce, a B niech będzie zbiorem wszystkich polskich numerów rejestracyjnych. Zbiór $A \times B$ jest zbiorem wszystkich par (samochód, numer rejestracyjny).
Niech teraz $\mathcal{R}$ będzie zbiorem par

$$(\text{VIN}, \text{numer rejestracyjny } [\ldots]) \, .$$

Wtedy relację $a\mathcal{R}b$ czytamy
„a jest samochodem o numerze VIN … zarejestrowanym w Polsce o numerze rejestracyjnym […]"
Zauważmy, że przyporządkowanie między samochodem a numerem rejestracyjnym jest (powinno być) funkcją wzajemnie jednoznaczną.

Iloczyn kartezjański k zbiorów

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in X_i\},$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_k$ są dowolnymi zbiorami.

Iloczyn kartezjański k zbiorów

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in X_i\},$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_k$ są dowolnymi zbiorami.

Podobnie jak poprzednio, zbiór

$$\mathcal{R} \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k,$$

nazwiemy relacją k-argumentową.

Iloczyn kartezjański k zbiorów

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in X_i\},$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_k$ są dowolnymi zbiorami.

Podobnie jak poprzednio, zbiór

$$\mathcal{R} \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k,$$

nazwiemy relacją k-argumentową.

Twierdzenie

$$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = X \times Y \times Z.$$

Bazy danych

Używane nazwy w teorii relacyjnych baz danych i ogólnie w informatyce:

- krotka, czyli wiersz w tabeli,
- rekord.

Przykład: baza danych samochodów

- M – marka.
- V – numer VIN samochodu
- N – możliwy (legalny) numer rejestracyjny,
- K – kolor samochodu,
- S – pojemność skokowa:
  1. brak (silnik inny niż tłokowy),
  2. do $2000\,\mathrm{cm}^3$,
  3. powyżej $2000\,\mathrm{cm}^3$,
- P - paliwo: (B,D,E,EB,ED,L,H,O).

Przykład: baza danych samochodów

- M – marka.
- V – numer VIN samochodu
- N – możliwy (legalny) numer rejestracyjny,
- K – kolor samochodu,
- S – pojemność skokowa:
  1. brak (silnik inny niż tłokowy),
  2. do 2000 cm^3,
  3. powyżej 2000 cm^3,
- P - paliwo: (B,D,E,EB,ED,L,H,O).

Samochód w bazie $B_{\mathrm{sam.os.}} \subset M \times V \times N \times K \times S \times P$.
Na przykład (dane fikcyjne)
(Fiat, WDCUF56J97T3X2304, DTR22222, czarny, 2, B).

Przykład: kod Hamminga – SECDEC (1)

Słowo kodowe

$$m_3 m_2 m_1 m_0 r_2 r_1 r_0 p. \tag{1}$$

- $m_3 m_2 m_1 m_0$ – bity informacyjne,
- $r_2 r_1 r_0$ – bity kontrolne,
- p – bit kontroli parzystości dla $m_3 m_2 m_1 m_0 r_2 r_1 r_0$.

$$\begin{aligned} r_2 &= m_3 + m_2 + m_1 \mod 2, \\ r_1 &= m_2 + m_1 + m_0 \mod 2, \\ r_0 &= m_3 + m_2 + m_0 \mod 2, \end{aligned} \tag{2}$$

Niech

- $m = (m_3 m_2 m_1 m_0)_2$,
- $r = (r_2 r_1 r_0 p)_2$,
- $c = (m_3 m_2 m_1 m_0 r_2 r_1 r_0 p)_2$.

Przykład: kod Hamminga – SECDEC (2)

Zbiory:

- $M = \{0, 1, \ldots, 15\}$,
- $R = \{0, 1, \ldots, 7\}$,
- $C = \{0, 1, \ldots, 255\}$,

Relacja trójargumentowa:

$$(m, r, c) \in \mathcal{R} \subset M \times R \times C \iff c \text{ jest słowem kodowym dla } m.$$

Relacje jako zbiory

Ponieważ relacja są zbiorami, to można na nich wykonywać operacje takie, jak na wszystkich zbiorach.

Relacje jako zbiory

Ponieważ relacja są zbiorami, to można na nich wykonywać operacje takie, jak na wszystkich zbiorach.

Przykład.

$$\mathcal{R} \subset X \times Y,$$
$$\mathcal{S} \subset X \times Y.$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (x, y) \in \mathcal{S}\}.$$

Relacje jako zbiory

Ponieważ relacja są zbiorami, to można na nich wykonywać operacje takie, jak na wszystkich zbiorach.

Przykład.

$$\mathcal{R} \subset X \times Y,$$
$$\mathcal{S} \subset X \times Y.$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(x,y) : (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (x,y) \in \mathcal{S}\}.$$

Przykład. $X = Y = \mathbb{Z}$.

Relacje jako zbiory

Ponieważ relacja są zbiorami, to można na nich wykonywać operacje takie, jak na wszystkich zbiorach.

Przykład.

$$\mathcal{R} \subset X \times Y,$$
$$\mathcal{S} \subset X \times Y.$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (x, y) \in \mathcal{S}\}.$$

Przykład. $X = Y = \mathbb{Z}$.

$$m\mathcal{R}n \iff m \in \mathbb{N} \wedge n = m^2,$$
$$m\mathcal{S}n \iff m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge n = m^2.$$

$m\,(\mathcal{R} \cup S)\,n \iff n$ jest kwadratem liczby całkowitej m różnej od zera.

Suma, iloczyn, ...

Relacje $\mathcal{R}_i \subseteq X_i \times Y_i$, dla $i = 1, 2$.

- Suma: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \subseteq X_1 \times Y_1 \cup X_2 \times Y_2$.

$$x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}_1 y \vee x\mathcal{R}_2 y.$$

- Iloczyn: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \subseteq X_1 \times Y_1 \cap X_2 \times Y_2$.

$$x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}_1 y \wedge x\mathcal{R}_2 y.$$

- Różnica: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2 \subseteq X_1 \times Y_1 \setminus X_2 \times Y_2$.

$$x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}_1 y \wedge \sim (x\mathcal{R}_2 y)\,.$$

- Iloczyn kartezjański: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \subseteq (X_1 \times Y_1) \times (X_2 \times Y_2)$

$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \iff x_1 \mathcal{R}_1 y_1 \wedge x_2 \mathcal{R}_2 y_2\,.$$

Relacja przeciwna do relacji

Niech $\mathcal{R}$ będzie relacją: $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$.
Relacja $\bar{\mathcal{R}}$ przeciwna do $\mathcal{R}$ jest określona wzorem

$$x\bar{\mathcal{R}}y \iff y\mathcal{R}x.$$

Inne oznaczenie na relację przeciwną: $\mathcal{R}^{\leftarrow}$.

Przykład. Relacja przeciwną do relacji $\leq$ jest relacja $\geq$.
Relacja przeciwną do relacji $>$ jest relacja $<$.

Złożenie relacji

Niech $\mathcal{R}_1 \subseteq A_1 \times B_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq A_2 \times B_2$, $B_1 \subseteq A_2$.
Relacja $\mathcal{R}$ jest złożeniem (superpozycją) relacji $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$:
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$, gdy $B_1 \subseteq A_2$ oraz

$$a\mathcal{R}b \iff \bigvee_{c \in B_1} a\mathcal{R}_1 c \vee c\mathcal{R}_2 b.$$

Oczywiście $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times B_2$.

Rzutowanie relacji

Niech $\mathcal{R}$ będzie relacją n-argumentową:

$$\mathcal{R} \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

oraz niech $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, $1 \leq k \leq n$.
Rzutowaniem będzie relacja $\tilde{\mathcal{R}}$ taka, że

$$(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}) \in \tilde{\mathcal{R}} \iff (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}$$

dla pewnych $a_j \in A_j$ i wszystkich $j \notin (n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Przykład: student – dane

1. Imiona: I
2. Nazwisko: N
3. Data urodzenia $D = 1920 \cdots 2020$
4. Miejsce urodzenia M (tekst)
5. Płeć $P = \{k, m, i\}$,
6. Rodzaj dokumentu tożsamości T_r
7. Numer dokumentu tożsamości T_n
8. PESEL E
9. Kraj urodzenia K_u
10. Obywatelstwo K_o
11. Numer indeksu A
12. Wydział W
13. Kierunek W_k
14. Rok studiów R

Przykład: student – bazy

Pełna baza:

$$\mathcal{B} \subset I \times N \times D \times M \times P \times T_r \times T_n \times E \times K_u \times K_o \times A \times W \times W_k \times R.$$

Przykład: student – bazy

Pełna baza:

$$\mathcal{B} \subset I \times N \times D \times M \times P \times T_r \times T_n \times E \times K_u \times K_o \times A \times W \times W_k \times R.$$

Rzutowanie – część bazy dostępna dla wykładowcy:

$$(a, b, c) \in \mathcal{B}_w \subset I \times N \times A \iff (a_1, \ldots, a_{14} \in \mathcal{B}),$$

gdzie

$$a = a_1 \in I, \; b = a_2 \in N, \; c = a_{11} \in A.$$

Przykład: student – bazy

Pełna baza:

$$\mathcal{B} \subset I \times N \times D \times M \times P \times T_r \times T_n \times E \times K_u \times K_o \times A \times W \times W_k \times R.$$

Rzutowanie – część bazy dostępna dla wykładowcy:

$$(a, b, c) \in \mathcal{B}_w \subset I \times N \times A \iff (a_1, \dots, a_{14} \in \mathcal{B}),$$

gdzie

$$a = a_1 \in I,\ b = a_2 \in N,\ c = a_{11} \in A.$$

Rzutowanie – część bazy dla pewnych służb:

$$(a, b, c, d) \in \mathcal{B}_s \subset I \times N \times K_u \times K_o \iff (a_1, \dots, a_{14} \in \mathcal{B}),$$

gdzie

$$a = a_1 \in I,\ b = a_2 \in N,\ c = a_9 \in K_u,\ d = a_{10} \in K_o.$$

Cztery własności (1)

Relacja $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, jest

1. Zwrotna, gdy
$$(a, a) \in \mathcal{R}.$$
2. Symetryczna, gdy
$$(a, b) \in \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{R}.$$
3. Antysymetryczna, gdy
$$(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \implies a = b.$$
4. Przechodnia, gdy
$$(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \implies (a, c) \in \mathcal{R}.$$

Cztery własności (2)

Inna notacja.
Relacja $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, jest

1. Zwrotna, gdy
$$a\mathcal{R}a.$$
2. Symetryczna, gdy
$$a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a.$$
3. Antysymetryczna, gdy
$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b.$$
4. Przechodnia, gdy
$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c.$$

Relacja $=$

1. jest zwrotna: $a = a$,
2. jest symetryczna: $a = b \implies b = a$,
3. jest antysymetryczna: $a = b \wedge b = a \implies a = b$ (tautologia!),
4. jest przechodnia: $a = b \wedge b = c \implies a = c$.

Relacja $<$

1. nie jest zwrotna: $\sim (a < a)$,
2. nie jest symetryczna: $a < b \implies \sim (b < a)$,
3. nie jest antysymetryczna,
4. jest przechodnia: $a < b \wedge b < c \implies a < c$.

Relacja $\leq$

1. jest zwrotna: $a \leq a$,
2. nie jest symetryczna: $a \neq b \implies a < b$, czyli $\sim (b < a)$,
3. jest antysymetryczna: $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$.
4. jest przechodnia: $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$.

Relacja $\subseteq$

Niech $\mathcal{X}$ będzie pewną rodziną podzbiorów zbioru X, czyli $\mathcal{X} \subseteq 2^X$.
Relacja $\subseteq$ w tej rodzinie, $A, B, C \in \mathcal{X}$

1. jest zwrotna: $A \subseteq A$,
2. nie jest symetryczna: $A \neq B \implies A \subset B$, czyli $\sim (B \subset A)$,
3. jest antysymetryczna: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$.
4. jest przechodnia: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$.

Relacja podobieństwa

Rozważamy podobieństwo $\mathcal{P}$ figur geometrycznych a, b, c.
Relacja podobieństwa

1. jest zwrotna: $a\mathcal{P}a$,
2. jest symetryczna: $a\mathcal{P}b \implies b\mathcal{P}a$,
3. nie jest antysymetryczna,
4. jest przechodnia: $a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}c \implies a\mathcal{P}c$.

Relacja podobieństwa?

Jeśli rozważamy relacje podobieństwa obiektów innych niż geometryczne, to przechodniość nie musi zachodzić.

Relacja podobieństwa?

Jeśli rozważamy relacje podobieństwa obiektów innych niż geometryczne, to przechodniość nie musi zachodzić.

Przykład. Algorytm AI może znaleźć podobieństwo między obiektami A i B, czyli $A\mathcal{P}B$, a także podobieństwo między obiektami B i C, czyli $B\mathcal{P}C$.

Relacja podobieństwa?

Jeśli rozważamy relacje podobieństwa obiektów innych niż geometryczne, to przechodniość nie musi zachodzić.

Przykład. Algorytm AI może znaleźć podobieństwo między obiektami A i B, czyli $A\mathcal{P}B$, a także podobieństwo między obiektami B i C, czyli $B\mathcal{P}C$.

Niemniej, podobieństwa $\mathcal{P}$ mogą być na tyle małe, że algorytm nie stwierdzi podobieństwa $A\mathcal{P}C$.

Zbiór dzieli się ...

Zbiór A dzieli się na zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$, gdy

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$$

oraz

$$\bigwedge_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Zbiór dzieli się ...

Zbiór A dzieli się na zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$, gdy

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$$

oraz

$$\bigwedge_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Tak samo jest dla podziału na nieskończoną liczbę podzbiorów. Zbiór A dzieli się na zbiory $A_1, A_2, \ldots,$ gdy

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = A$$

oraz

$$\bigwedge_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Relacja równoważności

Relacja $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, gdy jest

1. zwrotna,
2. symetryczna,
3. przechodnia.

Relacja równoważności

Relacja $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, gdy jest

1. zwrotna,
2. symetryczna,
3. przechodnia.

Twierdzenie

Niech A będzie zbiorem, w którym określona jest relacja równoważności $\equiv$.
Wtedy zbiór dzieli się jednoznacznie na podzbiory $A_1, A_2, \ldots$ takie, że

- *jeśli $a, b \in A_i$ dla pewnego i, to $a \equiv b$,*
- *jeśli $a \in A_i$, $b \in A_j$, $i \neq j$, to $\sim (a \equiv b)$, (inaczej $a \not\equiv b$).*

Klasy równoważności

Jeśli relacja równoważności dzieli zbiór A na zbiory $A_1, A_2, \ldots,$ to zbiory te nazywamy klasami równoważności.

Klasy równoważności

Jeśli relacja równoważności dzieli zbiór A na zbiory $A_1, A_2, \ldots,$ to zbiory te nazywamy klasami równoważności.
Niech A będzie klasą równoważności dla $\equiv$ oraz niech $a \in A$ będzie dowolnym elementem klasy.
Klasę równoważności można określić wzorem

$$A = \{x : x \equiv a\}.$$

Taki element a nazywa się reprezentantem klasy.

Mundial

Na mistrzostwach świata w piłce nożnej w roku 2022 niech Z będzie zbiorem wszystkich zawodników zgłoszonych do gry. Zawodnicy $z_1 \approx z_2$, gdy reprezentują ten sam kraj.
Zbiór wszystkich zawodników

$$\{z : z \approx \text{Lewandowski}\} = \{z : z \approx \text{Szczęsny}\} = \ldots$$

jest reprezentacją Polski (klasą równoważności *Polska*), a Lewandowski i Szczęsny są reprezentantami tej klasy.

Mundial

Na mistrzostwach świata w piłce nożnej w roku 2022 niech Z będzie zbiorem wszystkich zawodników zgłoszonych do gry.
Zawodnicy $z_1 \approx z_2$, gdy reprezentują ten sam kraj.
Zbiór wszystkich zawodników

$$\{z : z \approx \text{Lewandowski}\} = \{z : z \approx \text{Szczęsny}\} = \dots$$

jest reprezentacją Polski (klasą równoważności *Polska*), a Lewandowski i Szczęsny są reprezentantami tej klasy.

Zbiór zawodników

$$\{z : z \approx \text{Ronaldo}\}$$

jest reprezentacją Portugalii.

Modulo m

Dwie liczby całkowite są równoważne modulo m, gdy mają taką resztę z dzielenia przez m, co oznaczamy jako

$$i \equiv j \mod m$$

Modulo m

Dwie liczby całkowite są równoważne modulo m, gdy mają taką resztę z dzielenia przez m, co oznaczamy jako

$$i \equiv j \mod m$$

W językach C/C++ i Python: `(i%m)==((m+i)%m)` ma wartość `true`.
W języku Pascal: `(i mod m)=((m+i) mod m)` ma wartość `true`.

Nawiasy na wszelki wypadek, aby zapewnić właściwa kolejność operacji – dzielenia i porównywania.

Relacja częściowego porządku

Relacja $\mathcal{R}$ jest relacją częściowego porządku, gdy jest

1. zwrotna,
2. antysymetryczna,
3. przechodnia.

Relację częściowego porządku w zbiorze X oznacza się często przez $\preceq$.

Wtedy parę $(X, \preceq)$ nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym.

Przykład częściowego porządku

Kupujemy samochód.
Mamy różne preferencje (cena, wielkość, moc, kolor, prędkość itp.)
Wg. nich porządkujemy relacją $\preceq_X$ samochody naszych marzeń.

Przykład częściowego porządku

Kupujemy samochód.
Mamy różne preferencje (cena, wielkość, moc, kolor, prędkość itp.)
Wg. nich porządkujemy relacją $\preceq_X$ samochody naszych marzeń.
Pani A ma preferencje $\preceq_A$ wg subiektywnego zestawu (cena+kolor+wielkość).

Przykład częściowego porządku

Kupujemy samochód.
Mamy różne preferencje (cena, wielkość, moc, kolor, prędkość itp.)
Wg. nich porządkujemy relacją $\preceq_X$ samochody naszych marzeń.
Pani A ma preferencje $\preceq_A$ wg subiektywnego zestawu (cena+kolor+wielkość).
Pan B ma preferencje $\preceq_B$ wg subiektywnego zestawu (moc+prędkość).

Przykład częściowego porządku

Kupujemy samochód.
Mamy różne preferencje (cena, wielkość, moc, kolor, prędkość itp.)
Wg. nich porządkujemy relacją $\preceq_X$ samochody naszych marzeń.
Pani A ma preferencje $\preceq_A$ wg subiektywnego zestawu (cena+kolor+wielkość).
Pan B ma preferencje $\preceq_B$ wg subiektywnego zestawu (moc+prędkość).
Porządek jest tylko częściowy, bo zarówno wg preferencji pani A jak i pana B istnieją zapewne dwa samochody, które wg tych preferencji są nieporównywalne.

Porządek liniowy

Jeśli możemy porównać dowolne dwa elementy zbioru, to porządek taki nazywamy liniowym:

$$\bigwedge_{(a,b)} a \preceq b \vee b \preceq a.$$

Porządek liniowy

Jeśli możemy porównać dowolne dwa elementy zbioru, to porządek taki nazywamy liniowym:

$$\bigwedge_{(a,b)} a \preceq b \vee b \preceq a.$$

Jeśli $a \preceq b$ i $a \neq b$, to piszemy też $a \prec b$.

Przetarg na zakup

Ogłaszamy przetarg na zakup sprzętu x spełniającego podane wymagania $W(x)$

$$X = \{x : W(x)\},$$

gdzie jedynym kryterium jest cena.

Stąd w zbiorze istnieje sprzęt o najniższej cenie.
Dwa sprzęty o tej samej cenie są dla księgowego identyczne, więc porządek jest liniowy, a wybór jest zawsze jednoznaczny.

Przetarg na zakup

Ogłaszamy przetarg na zakup sprzętu x spełniającego podane wymagania $W(x)$

$$X = \{x : W(x)\},$$

gdzie jedynym kryterium jest cena.

Stąd w zbiorze istnieje sprzęt o najniższej cenie.
Dwa sprzęty o tej samej cenie są dla księgowego identyczne, więc porządek jest liniowy, a wybór jest zawsze jednoznaczny.

Dla użytkowników taki porządek jest tylko częściowy.

Jaki porządek?

Niech A będzie pewnym alfabetem, np. wszystkimi znakami w kodzie ASCII.

Znając częstość występowania znaków alfabetu w tekście, tworzymy drzewo Huffmana i wynikający z niego kod.

Niech H będzie zbiorem słów kodowych, $h = (h_1, \dots, h_k) \in H$.

Jaki porządek?

Niech A będzie pewnym alfabetem, np. wszystkimi znakami w kodzie ASCII.

Znając częstość występowania znaków alfabetu w tekście, tworzymy drzewo Huffmana i wynikający z niego kod.

Niech H będzie zbiorem słów kodowych, $h = (h_1, \ldots, h_k) \in H$.

Oznaczenia: $d(h) = k$ – długość słowa kodowego h,
$v(h) = (h_1, \ldots, h_k)_2$ – wartość liczbowa słowa h

Jaki porządek?

Niech A będzie pewnym alfabetem, np. wszystkimi znakami w kodzie ASCII.

Znając częstość występowania znaków alfabetu w tekście, tworzymy drzewo Huffmana i wynikający z niego kod.

Niech H będzie zbiorem słów kodowych, $h = (h_1, \ldots, h_k) \in H$.

Oznaczenia: $d(h) = k$ – długość słowa kodowego h,
$v(h) = (h_1, \ldots, h_k)_2$ – wartość liczbowa słowa h

Wprowadzimy relację $\preceq$ w H, $i, j \in H$:

- Jeśli $d(i) < d(j)$, to $i \prec j$.
- Jeśli $d(i) = d(j)$ oraz $v(i) < v(j)$, to $i \prec j$.
- Jeśli $i \prec j$ lub $i = j$, to $i \preceq j$.

Jaki porządek?

Niech A będzie pewnym alfabetem, np. wszystkimi znakami w kodzie ASCII.

Znając częstość występowania znaków alfabetu w tekście, tworzymy drzewo Huffmana i wynikający z niego kod.

Niech H będzie zbiorem słów kodowych, $h = (h_1, \ldots, h_k) \in H$.

Oznaczenia: $d(h) = k$ – długość słowa kodowego h,
$v(h) = (h_1, \ldots, h_k)_2$ – wartość liczbowa słowa h

Wprowadzimy relację $\preceq$ w H, $i, j \in H$:

- Jeśli $d(i) < d(j)$, to $i \prec j$.
- Jeśli $d(i) = d(j)$ oraz $v(i) < v(j)$, to $i \prec j$.
- Jeśli $i \prec j$ lub $i = j$, to $i \preceq j$.

Własności takiej relacji?

Jaki porządek?

Niech A będzie pewnym alfabetem, np. wszystkimi znakami w kodzie ASCII.

Znając częstość występowania znaków alfabetu w tekście, tworzymy drzewo Huffmana i wynikający z niego kod.

Niech H będzie zbiorem słów kodowych, $h = (h_1, \ldots, h_k) \in H$.

Oznaczenia: $d(h) = k$ – długość słowa kodowego h,
$v(h) = (h_1, \ldots, h_k)_2$ – wartość liczbowa słowa h

Wprowadzimy relację $\preceq$ w H, $i, j \in H$:

- Jeśli $d(i) < d(j)$, to $i \prec j$.
- Jeśli $d(i) = d(j)$ oraz $v(i) < v(j)$, to $i \prec j$.
- Jeśli $i \prec j$ lub $i = j$, to $i \preceq j$.

Własności takiej relacji?

Zadanie – raczej trudne!