Matematyka Dyskretna

Wykład 2

Zbiory i ich własności

Wojciech Kordecki
wojciech.kordecki@collegiumwitelona.pl

Collegium Witelona
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Zakład Informatyki

Semestr letni 2023/24

Co to jest zbiór?

Zbiór, to pojęcie pierwotne.
Nie ma definicji zbioru.
Przykłady.

$$A = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$B = \{\bullet, \circ, \blacklozenge, \blacktriangle, \blacksquare\},$$
$$C = \{a, b, c, \ldots, i, j\},$$
$$D = \{3, 5, 7, \ldots, 83\}.$$

Co to jest zbiór?

Zbiór, to pojęcie pierwotne.
Nie ma definicji zbioru.
Przykłady.

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\}\,, \\ B &= \{\bullet, \circ, \blacklozenge, \blacktriangle, \blacksquare\}\,, \\ C &= \{a, b, c, \ldots, i, j\}\,, \\ D &= \{3, 5, 7, \ldots, 83\}\,. \end{aligned}$$

Uwaga. Nie wiadomo, czy D ma być zbiorem liczb nieparzystych postaci $2k + 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, 41$, czy też zbiorem wszystkich liczb pierwszych p takich, że $3 \le p \le 83$, czyli:

$$\begin{aligned} D = \{&3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 37, 41, \\ &43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83\}. \end{aligned}$$

Oznaczenia

Zbiory oznaczamy zwykle literami $A, B, C, \dots,$ a ich elementy literami $a, b, c, \dots$
$a \in A$ oznacza „a jest elementem zbioru A” lub krócej „a należy do A”.
$a \notin A$ oznacza „a nie jest elementem zbioru A” lub krócej „a nie należy do A”, czyli

$$a \notin A \iff \sim a \in A.$$

Podzbiory

Niech A i B będą dwoma zbiorami takimi, że

$$x \in A \implies x \in B,$$

czyli że każdy element należący do zbioru A jest też elementem zbioru B, to mówimy, że A jest podzbiorem zbioru B i piszemy $A \subseteq B$.
Jeżeli $A \subseteq B$ oraz $A \neq B$, to piszemy $A \subset B$.

Podzbiory

Niech A i B będą dwoma zbiorami takimi, że

$$x \in A \implies x \in B,$$

czyli że każdy element należący do zbioru A jest też elementem zbioru B, to mówimy, że A jest podzbiorem zbioru B i piszemy $A \subseteq B$.
Jeżeli $A \subseteq B$ oraz $A \neq B$, to piszemy $A \subset B$.

Jest to pewna analogia do relacji nierówności słabej $\leq$ i mocnej $<$.

Podzbiory

Niech A i B będą dwoma zbiorami takimi, że

$$x \in A \implies x \in B,$$

czyli że każdy element należący do zbioru A jest też elementem zbioru B, to mówimy, że A jest podzbiorem zbioru B i piszemy $A \subseteq B$.
Jeżeli $A \subseteq B$ oraz $A \neq B$, to piszemy $A \subset B$.

Jest to pewna analogia do relacji nierówności słabej $\leq$ i mocnej $<$.

Przyjęte są też oznaczenia: $A \subset B$ zamiast $A \subseteq B$, ale wtedy dla odróżnienia piszemy $A \subsetneq B$ zamiast $A \subset B$.

Zbiór zbiorów elementów

Podzbiory zbioru mogą być elementami innego zbioru, zwanego też często rodziną zbiorów.

Przykład. Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Niech

$$\mathcal{A} = \left\{ X : \sum_{i \in X} i \text{ jest podzielna przez } 3 \right\}.$$

Wtedy

$$\mathcal{A} = \{\{3\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \ldots\}.$$

Zbiór zbiorów elementów

Podzbiory zbioru mogą być elementami innego zbioru, zwanego też często rodziną zbiorów.

Przykład. Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Niech

$$\mathcal{A} = \left\{ X : \sum_{i \in X} i \text{ jest podzielna przez } 3 \right\}.$$

Wtedy

$$\mathcal{A} = \{\{3\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \ldots\}.$$

Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru A (włączając w to $\emptyset$ i A) oznaczymy symbolicznie przez 2^A.

Równość zbiorów

Dwa zbiory A i B są równe, gdy składają się z tych samych elementów.

Własność

Jeśli

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \implies A = B.$$

Zbiory a formy zdaniowe

Wzór

$$A = \{x : P(x)\}$$

oznacza: A jest zbiorem wszystkich takich elementów x, dla których $P(x)$, czyli takich, dla których $P(x)$ jest zdaniem prawdziwym.

Zbiory a formy zdaniowe

Wzór

$$A = \{x : P(x)\}$$

oznacza: A jest zbiorem wszystkich takich elementów x, dla których $P(x)$, czyli takich, dla których $P(x)$ jest zdaniem prawdziwym.

$$B = \{x \in X : P(x)\}$$

oznacza: A jest zbiorem wszystkich takich elementów $x \in X$, dla których $P(x)$, czyli takich x należących do X, dla których $P(x)$ jest zdaniem prawdziwym.

Liczby pierwsze c.d

Zamiast określenia zbioru D poprzez podanie jego elementów

$$D = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83\},$$

można równoważnie określić ten zbiór wzorem

$$D = \{n : n \text{ jest liczbą pierwszą oraz } 3 \leq n \leq 83\}.$$

Odcinki

Odcinki domknięte $[a, b]$, otwarte (a, b), lewostronnie domknięte i prawostronnie otwarte $[a, b)$, lewostronnie otwarte i prawostronnie domknięte $(a, b]$:

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x : a \leq x \leq b\}, \\
(a, b) &= \{x : a < x < b\}, \\
[a, b) &= \{x : a \leq x < b\}, \\
(a, b] &= \{x : a < x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

Odcinki

Odcinki domknięte $[a, b]$, otwarte (a, b), lewostronnie domknięte i prawostronnie otwarte $[a, b)$, lewostronnie otwarte i prawostronnie domknięte $(a, b]$:

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x : a \leq x \leq b\}, \\
(a, b) &= \{x : a < x < b\}, \\
[a, b) &= \{x : a \leq x < b\}, \\
(a, b] &= \{x : a < x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

Odcinki są zbiorami nieskończonymi.

Zbiory nieskończone

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \text{ – zbiór liczb naturalnych,}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ – zbiór liczb całkowitych,}$$

$$\mathbb{W} = \left\{x : x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}\right\} \text{ – zbiór liczb wymiernych.}$$

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczymy przez $\mathbb{R}$.

Działania na zbiorach

Dla zbiorów definiuje się działania sumy $\cup$, iloczynu $\cap$, różnicy $\setminus$ i różnicy symetrycznej $\div$. Sumę, iloczyn i różnicę można określić wzorami

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \vee x \in B, \\ x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B, \\ x \in A \setminus B &\iff x \in A \wedge x \notin B \end{aligned}$$

lub wzorami

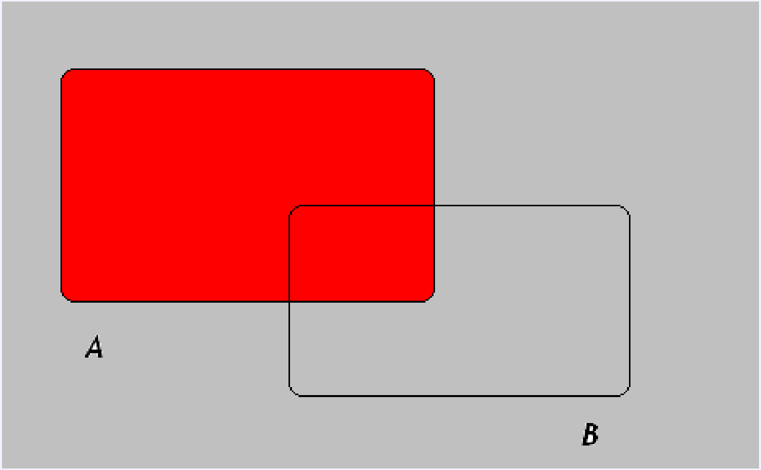
$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : x \in A \vee x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x : x \in A \wedge x \in B\}, \\ A \setminus B &= \{x : x \in A \wedge x \notin B\}. \end{aligned}$$

Różnicę symetryczną określamy wzorem

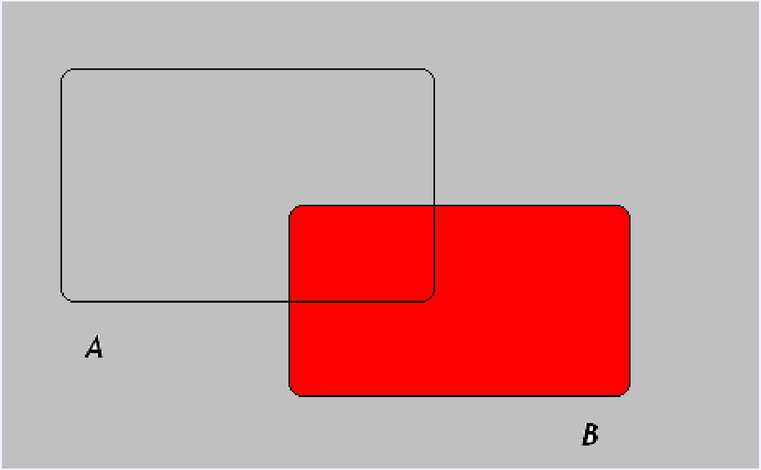
$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Uniwersum U

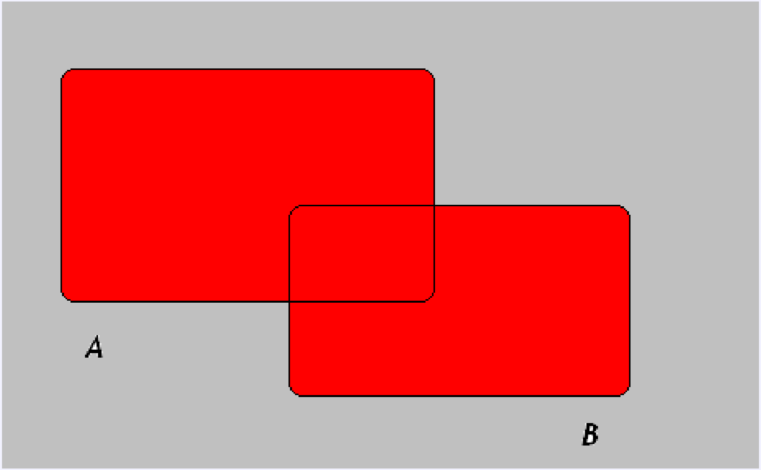
Zbiór A



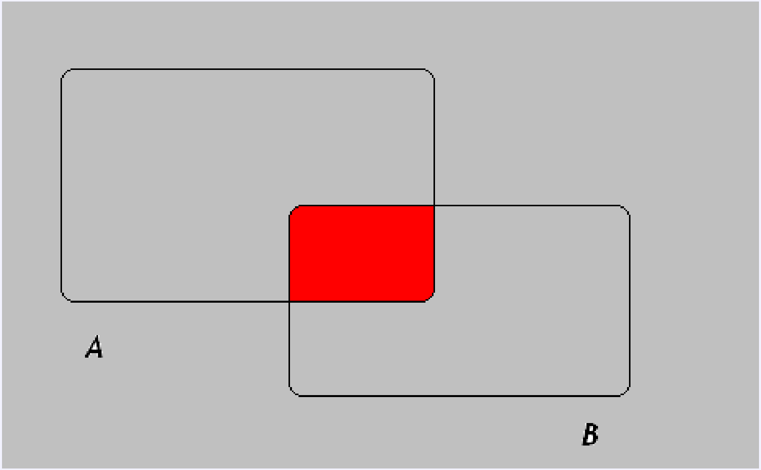
Zbiór B



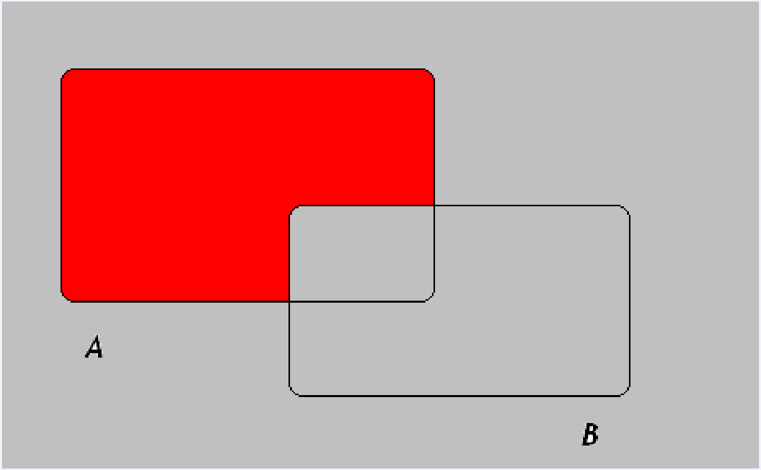
Suma zbiorów $A \cup B$



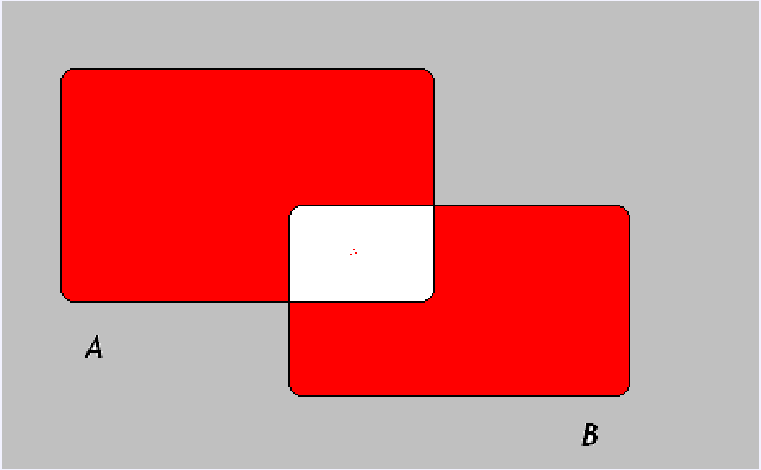
Iloczyn zbiorów $A \cap B$



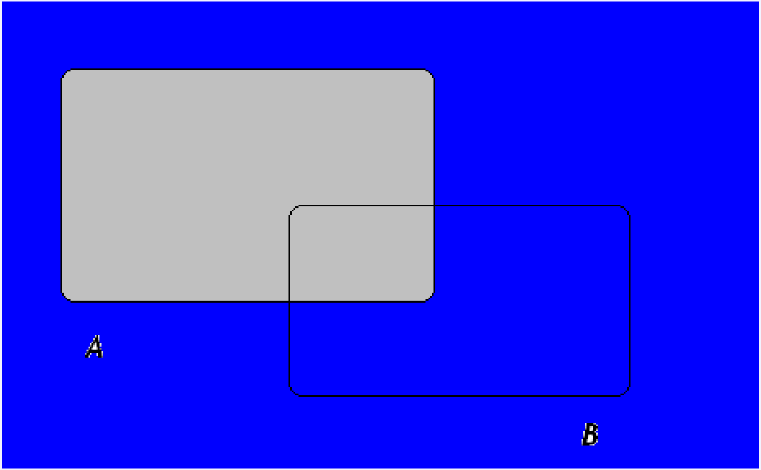
Różnica zbiorów $A \setminus B$



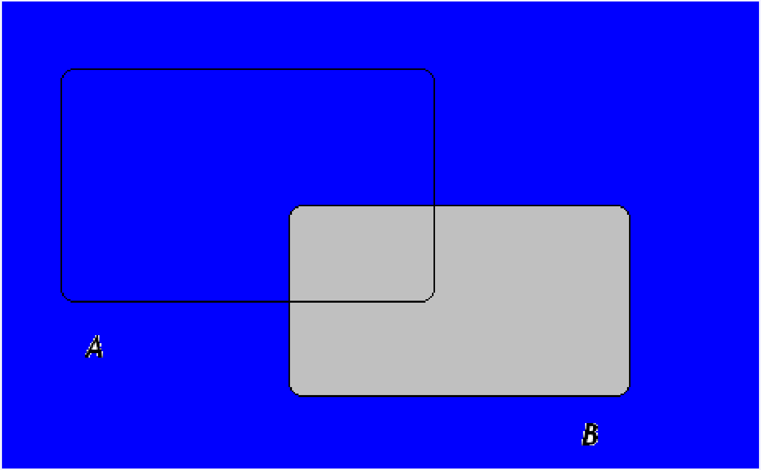
Różnica symetryczna zbiorów $A \div B$



Dopełnienie zbioru $A' = U \setminus A$



Dopełnienie zbioru $B' = U \setminus B$



Własności operacji na zbiorach

Twierdzenie

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \tag{1}$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B', \tag{2}$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{3}$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \tag{4}$$
$$A \cap A' = \emptyset,$$
$$A \cup A' = U.$$

Własności (1) i (2) nazywają się prawami de Morgana dla zbiorów. Własności (3) i (4) nazywają się odpowiednio prawami rozdzielności dodawania względem mnożenia i rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Skończony zbiór elementów

Jeśli A jest zbiorem skończonym o n elementach:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

to liczbę jego elementów oznaczamy

$$|A| = |\{a_1, a_2, \dots, a_n\}| = n.$$

Skończony zbiór elementów

Jeśli A jest zbiorem skończonym o n elementach:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

to liczbę jego elementów oznaczamy

$$|A| = |\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}| = n.$$

Liczbę elementów zbioru nazywa się też mocą zbioru.
Dwa zbiory A i B są tej samej mocy, gdy $|A| = |B|$.

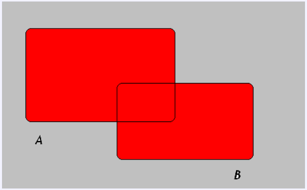
Zasada włączania-wyłączania: dwa i trzy zbiory

Ile elementów ma suma zbiorów $A \cup B$?

Co trzeba wiedzieć o liczbie elementów zbiorów A i B?

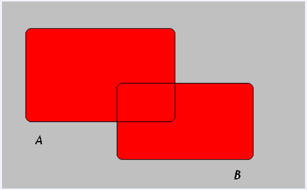
Zasada włączania-wyłączania: dwa i trzy zbiory

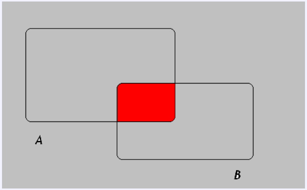
Ile elementów ma suma zbiorów $A \cup B$?
Co trzeba wiedzieć o liczbie elementów zbiorów A i B?



Zasada włączania-wyłączania: dwa i trzy zbiory

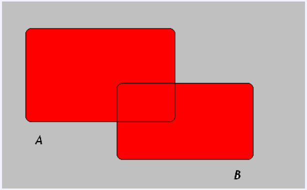
Ile elementów ma suma zbiorów $A \cup B$?
Co trzeba wiedzieć o liczbie elementów zbiorów A i B?

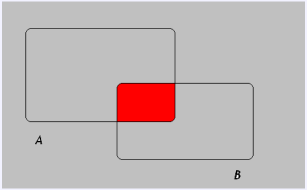




Zasada włączania-wyłączania: dwa i trzy zbiory

Ile elementów ma suma zbiorów $A \cup B$?
Co trzeba wiedzieć o liczbie elementów zbiorów A i B?

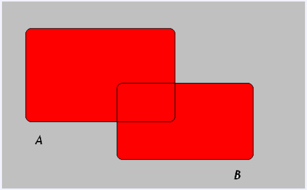


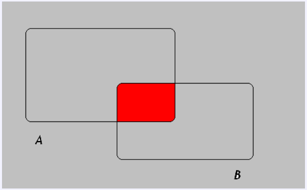


$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|\,,$$

Zasada włączania-wyłączania: dwa i trzy zbiory

Ile elementów ma suma zbiorów $A \cup B$?
Co trzeba wiedzieć o liczbie elementów zbiorów A i B?





$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \, ,$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \, . \end{aligned}$$

Zasada włączania-wyłączania: ogólnie

Twierdzenie

Jeśli dla dowolnego ciągu $(A_1, \ldots, A_n)$ niekoniecznie różnych zbiorów A_i:

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n\,,$$

to

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|\,.$$

Nieskończony zbiór elementów

Jeśli elementy nieskończonego zbioru dają się ponumerować liczbami naturalnymi, czyli dają się ustawić w ciąg, to taki zbiór nazywamy przeliczalnym.
Oczywiście, $\mathbb{N}$ jest zbiorem przeliczalnym.

Nieskończony zbiór elementów

Jeśli elementy nieskończonego zbioru dają się ponumerować liczbami naturalnymi, czyli dają się ustawić w ciąg, to taki zbiór nazywamy przeliczalnym.
Oczywiście, $\mathbb{N}$ jest zbiorem przeliczalnym.
Przeliczalny jest zbiór $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array}$$

Nieskończony zbiór elementów

Jeśli elementy nieskończonego zbioru dają się ponumerować liczbami naturalnymi, czyli dają się ustawić w ciąg, to taki zbiór nazywamy przeliczalnym.

Oczywiście, $\mathbb{N}$ jest zbiorem przeliczalnym.

Przeliczalny jest zbiór $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array}$$

Przeliczalny jest też zbiór $\mathbb{W}$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 1/2 & 1/3 & 2/3 & 1/4 & 3/4 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & \dots \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & \dots \\ \hline\hline & -1 & -1/2 & -1/3 & -2/3 & -1/4 & -3/4 & -1/5 & -2/5 & -3/5 & -4/5 & \dots \\ \hline & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & \dots \end{array}$$

Rodzina wszystkich podzbiorów

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}.$$

Każdemu podzbiorowi $B \subseteq A$ przyporządkujemy liczbę $n_B = (x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 x_0)_2$ w systemie dwójkowym:

$$x_i = \begin{cases} 1 & a_i \in B \\ 0 & a_i \notin B \end{cases}$$

Twierdzenie

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Silnia

Silnia liczby n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n.$$

Ponadto przyjmujemy $0! = 1$. Silnia bardzo szybko rośnie wraz ze wzrostem n

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040

Dalej:

$$10! = 3628800$$

$$20! = 2432902008176640000$$

$$30! = 265252859812191058636308480000000$$

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000$$

Problemy z silnią

Jeśli w języku programowanie największą liczba całkowitą bez znaku jest 64-bitowa, to największą liczbą n dla której można obliczyć $n!$ jest 20.

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615 > 20! = 2432902008176640000,$$

ale

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615 < 21! = 51090942171709440000.$$

W niektórych językach programowani (np. *Python*, *Maxima*), wielkość liczby całkowitej nie jest ograniczona.

Podzbiory k-elementowe

Oznaczmy przez $\binom{n}{k}$ liczbę podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego.
Zbiór pusty $\emptyset$ jest tylko jeden. Stąd liczba podzbiorów 0-elementowych dowolnego oraz n-elementowych zbioru n-elementowego jest zawsze równa 1.

1	2	...	n-1	n

Podzbiory k-elementowe

Oznaczmy przez $\binom{n}{k}$ liczbę podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego.

Zbiór pusty $\emptyset$ jest tylko jeden. Stąd liczba podzbiorów 0-elementowych dowolnego oraz n-elementowych zbioru n-elementowego jest zawsze równa 1.

1	2	...	n-1	n

Liczba podzbiorów k-elementowych w zbiorze n-elementowym jest równa

liczbie podzbiorów k-elementowych w zbiorze $n-1$-elementowym

$+$

liczbie podzbiorów $(k-1)$-elementowych w zbiorze $n-1$-elementowym z dodanym elementem n.

Silnia – Maxima

```
(%i1) factorial(n);
(%o1) n!

(%i2) L:makelist(factorial(k), k, 1, 20);
(%o2) [1,2,6,24,120,720,5040,40320,362880,3628800,
39916800,479001600,6227020800,87178291200,
1307674368000,20922789888000,
355687428096000,6402373705728000,
121645100408832000,2432902008176640000]

(%i3) L[19];
(%o3) 121645100408832000

(%i4) 19!;
(%o4) 121645100408832000
```

Symbol Newtona

Twierdzenie

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Symbol Newtona

Twierdzenie

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

$\binom{n}{k}$ nazywa się symbolem Newtona i czyta się „n nad k".
Powyższe twierdzenie daję wzór rekurencyjny na symbol Newtona, pamiętając że

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Symbol Newtona i trójkąt Pascala

Twierdzenie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ze wzoru rekurencyjnego i z powyższego twierdzenia otrzymujemy trójkąt Pascala.

$$\binom{n}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \dots\dots\dots\dots & & & & \end{array}$$

Wiersze (n) i elementy w wierszu (k) od lewej, numerujemy od zera.

Symbol Newtona i silnia

Twierdzenie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Symbol Newtona i silnia

Twierdzenie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Według wzoru z tego twierdzenia, nie da się obliczyć symboli Newtona dla dużych n.
Obliczenie „na ile sposobów można wybrać k przedmiotów ze zbioru wszystkich $n > 20$ przedmiotów", będzie bardzo trudne na przykład w języku C++.

Obliczenie tego samego, ale ze wzoru rekurencyjnego, jest możliwe dla znacznie większych n, na przykład dla $n = 67$ i dla 64-bitowej liczby całkowitej bez znaku.

Symbol Newtona – Maxima

$$\binom{11}{5} = \binom{10}{5} + \binom{10}{4} = 252 + 210.$$

```
(%i5) binomial(11,5);
(%o5) 462

(%i6) 11!/((5!)*(6!));
(%o6) 462

(%i7) binomial(10,5)+binomial(10,4);
(%o7) 462
```

Przykład

Problem. Ile jest ciągów binarnych długości 15 takich, że na pierwszych 3 bitach mamy co najmniej jedną jedynkę, a na ostatnich 7 bitach mamy dokładnie dwie jedynki.

Przykład

Problem. Ile jest ciągów binarnych długości 15 takich, że na pierwszych 3 bitach mamy co najmniej jedną jedynkę, a na ostatnich 7 bitach mamy dokładnie dwie jedynki.

Rozwiązanie.

1. Na pierwszych 3 bitach co najmniej jedna jedynka $\iff$ nie ma samych zer: $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$.
2. Na ostatnich 7 bitach dokładnie dwie jedynki $\iff$ liczba wyborów zbioru dwuelementowego z siedmioelementowego:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)\,(\cdot 2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

3. Na pozostałych 5 bitach wszystkie możliwości: $2^5 = 32$.

Przykład

Problem. Ile jest ciągów binarnych długości 15 takich, że na pierwszych 3 bitach mamy co najmniej jedną jedynkę, a na ostatnich 7 bitach mamy dokładnie dwie jedynki.

Rozwiązanie.

1. Na pierwszych 3 bitach co najmniej jedna jedynka $\iff$ nie ma samych zer: $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$.
2. Na ostatnich 7 bitach dokładnie dwie jedynki $\iff$ liczba wyborów zbioru dwuelementowego z siedmioelementowego:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)\,(\cdot 2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

3. Na pozostałych 5 bitach wszystkie możliwości: $2^5 = 32$.

Wszystkich możliwości jest $7 \cdot 21 \cdot 32 = 4704$.

Permutacje

Permutacją nazywa się każde uporządkowanie zbioru n-elementowego $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
Inaczej mówiąc, permutacją jest wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\pi : A \to A$.

Permutacje

Permutacją nazywa się każde uporządkowanie zbioru n-elementowego $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
Inaczej mówiąc, permutacją jest wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\pi : A \to A$.
Permutację zbioru A oznaczamy jako:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix},$$

gdzie $\{i_k\}$ jest dowolnym różnowartościowym ciągiem liczb $1 \leq i_k \leq n$.
Jeśli znany jest uporządkowany zbiór A, to wystarczy podać tylko drugi wiersz w tym zapisie.
Przykład. $A = \{1, 2, 3\}$. Wszystkie możliwe permutacje, to

$$(123), (213), (132), (321), (231), (312).$$

Liczba permutacji

Twierdzenie

Zbiór n-elementowy można uporządkować na $n!$ sposobów.

Liczba permutacji

Twierdzenie

Zbiór n-elementowy można uporządkować na $n!$ sposobów.

Dla dużych n można korzystać ze wzoru Stirlinga:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Ze wzoru Stirlinga wynika oszacowanie:

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Tasowanie kart

Przykład. Tasujemy 52 karty do gry.
Można to zrobić na 52! sposobów.

$52! =$

$$=80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000.$$

Ze wzoru Stirlinga mamy

$$52! \approx s = \sqrt{104\pi}\left(\frac{52}{e}\right)^{52} = 8.052902038388702 \cdot 10^{67}.$$

Błąd d:

$$d = \left|1 - \frac{52!}{s}\right| = 0.001603829109570354.$$

Procentowo, to tylko około 0.16%.

Książki na półce

W swoje bibliotece mamy 11 książek wydanych przez WNT w serii *Klasyka Informatyki*. Wśród nich trzytomowe dzieło D. Knutha *Sztuka programowania* i jego *TEX. Przewodnik użytkownika*. Książki układamy na półce wg reguł:

- Książki D. Knutha mają stać obok siebie.
- *Sztuka programowania* ma stać razem w kolejności tomów.
- Pozostałe książki mogą stać w dowolnych innych miejscach.

Na ile sposobów można postawić książki na półce?

Książki na półce

W swoje bibliotece mamy 11 książek wydanych przez WNT w serii *Klasyka Informatyki*. Wśród nich trzytomowe dzieło D. Knutha *Sztuka programowania* i jego *TEX. Przewodnik użytkownika*. Książki układamy na półce wg reguł:

- Książki D. Knutha mają stać obok siebie.
- *Sztuka programowania* ma stać razem w kolejności tomów.
- Pozostałe książki mogą stać w dowolnych innych miejscach.

Na ile sposobów można postawić książki na półce?

Odpowiedź. Na $n = 2 \cdot 8! = 80640$ sposobów.
Zakładając (optymistycznie), że jedno ustawienie zajmie nam 10 sekund, pracujemy 8 godzin dziennie i mamy wolne weekendy,to wystarczy nam niecałe półtora miesiąca na całość prac.

Książki na półce

W swoje bibliotece mamy 11 książek wydanych przez WNT w serii *Klasyka Informatyki*. Wśród nich trzytomowe dzieło D. Knutha *Sztuka programowania* i jego *TEX. Przewodnik użytkownika*. Książki układamy na półce wg reguł:

- Książki D. Knutha mają stać obok siebie.
- *Sztuka programowania* ma stać razem w kolejności tomów.
- Pozostałe książki mogą stać w dowolnych innych miejscach.

Na ile sposobów można postawić książki na półce?

Odpowiedź. Na $n = 2 \cdot 8! = 80640$ sposobów.
Zakładając (optymistycznie), że jedno ustawienie zajmie nam 10 sekund, pracujemy 8 godzin dziennie i mamy wolne weekendy,to wystarczy nam niecałe półtora miesiąca na całość prac.
Dokładniej: $((n/6)\,/60/)\,/8 = 28$ dni roboczych.

Kod do wejścia – problem

Do zakodowania wejścia możemy wykorzystać klawiaturę numeryczną z dziesięcioma cyframi.
Możemy wybrać jeden z trzech sposobów zakodowania:

1. Wybieramy pięć różnych cyfr w dowolnej kolejności.
2. Wybieramy cztery różne cyfry, ale kolejność jest ważna.
3. Wybieramy trzy cyfry, niekoniecznie różne, przy czym ważna jest kolejność.

Który sposób jest najbezpieczniejszy?

Kod do wejścia – rozwiązanie

Sposób 1 .

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 252.$$

Sposób 2 .

$$\binom{10}{4}4! = \frac{10!}{6!} = 5040$$

– wariacje bez powtórzeń.

Sposób 3 .

$$10^3 = 1000.$$

– wariacje z powtórzeniami.